MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

Mariana Craiu • Marcel N. Roșculeț

CULEGERE DE PROBLEME DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

Editura didactică și pedagogică București

PREFAȚĂ

Lucrarea prezentă se adresează în primul rînd studenților din instituțiile tehnice de învățămînt superior.

Am considerat util să prezentăm problemele rezolvate pentru ca cei interesați să poată avea la îndemînă posibilitatea verificării.

Problemele luate în discuție urmăresc programa analitică a Cursului de Analiză matematică pe care-l urmează în primul an studenții facultăților tehnice. Am ținut seama de capitolele și noțiunile introduse în ultimii ani: noțiunea de spațiu metric, spațiu topologic, integrala Stieltjes, integrala Lebesgue. Fiecare capitol conține cîteva probleme cu caracter teoretic care ilustrează teoreme de bază ale analizei matematice.

În încheiere, aducem mulțumiri prof. dr. Filimon Ion de la Institutul de Construcții București ale cărui observații și sugestii ne-au fost deosebit de utile.

Autorii

CAPITOLUL I

MULȚIMI. NUMERE. STRUCTURI.

1. Fie A_1, A_2, A_3, trei sub mulțimi ale unei mulțimi E. Dacă

$$A_1 \Delta A_2 = (A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_1) \qquad \text{(diferența simetrică)}$$

să se arate că

$$A_1 \Delta A_2 \subset (A_1 \Delta A_3) \cup (A_2 \Delta A_3).$$

Să se dea un exemplu în care incluziunea este strictă.

R: Avem $A_1 \Delta A_2 = (A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_1) = (A_1 \cup A_2) \cap (CA_1 \cup CA_2)$, deci:

$$(A_1 \Delta A_3) \cup (A_2 \Delta A_3) = [(A_1 \cup A_3) \cap (CA_1 \cup CA_3)] \cup [(A_2 \cup A_3) \cap (CA_2 \cup CA_3)] =$$
$$= \{[(A_1 \cup A_3) \cap (CA_1 \cup CA_3)] \cup (A_2 \cup A_3)\} \cap \{[(A_1 \cup A_3) \cap (CA_1 \cup CA_3)] \cup (CA_2 \cup CA_3)\} =$$
$$= (A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cap (CA_1 \cup CA_2 \cup CA_3).$$

Deoarece

$$A_1 \cup A_2 \subset A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

$$CA_1 \cup CA_2 \subset CA_1 \cup CA_2 \cup CA_3$$

urmează

$$A_1 \Delta A_2 \subset (A_1 \Delta A_3) \cup (A_2 \Delta A_3).$$

Exemplu. Fie $A_1 = (-2,5)$; $A_2 = [-1,1] \cup \{6\}$; $A_3 = \left[4, \frac{11}{2}\right]$;

avem

$$A_1 \Delta A_2 = (-2, -1) \cup (1,5) \cup \{6\},$$

$$A_1 \Delta A_3 = (-2,4) \cup \left(5, \frac{11}{2}\right),$$

$$A_2 \Delta A_3 = [-1,1] \cup \{6\} \cup \left[4, \frac{11}{2}\right),$$

urmează

$$(A_1 \Delta A_3) \cup (A_2 \Delta A_3) = \left(-2, \frac{11}{2}\right) \cup \{6\}$$

și incluziunea este strictă.

2. Dacă $(A_n)_{n \in N}$ este o familie de mulțimi, să se arate că

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \right) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \right),$$

R: Fie $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \right)$; există cel puțin un număr natural m astfel încît $x \in \bigcap_{k=m}^{\infty} A_k$, ceea ce înseamnă că $x \in A_{m+1}$, $x \in A_{m+2}$, ...

De aici rezultă $x \in A_n \cup A_{n+1} \cup \ldots \cup A_m \cup \ldots$ pentru orice $n < m$; de unde $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right)$.

3. Să se arate că intervalele

$$I_n = \left(0, \frac{a}{n}\right], \qquad a \in R,\ a > 0,\ n \in N$$

au intersecția vidă.

R: Avem evident

$$\left(0, \frac{a}{1}\right] \supset \left(0, \frac{a}{2}\right] \supset \ldots \supset \left(0, \frac{a}{n}\right] \supset \ldots$$

Fie $\xi \in I = \bigcap_k I_k$; trebuie să avem $\xi > 0$. Însă există $n_1 \in N$ astfel încît

$$\xi > \frac{a}{n_1}$$

deci și $\xi > \frac{a}{n}$ pentru $n \geqslant n_1$, $n \in N$; deci nu există $\xi > 0$, $\xi \in I$, deoarece $0 \notin I$ rezultă că I este o mulțime vidă.

În același mod se arată că intervalele

$$I_n^* = \left[b - \frac{a}{n}, b\right), \qquad b > a > 0,\ n = 1, 2, \ldots$$

au intersecția vidă.

4. Fie $(E_i)_{i \in N}$ un șir de mulțimi mărginite și închise care satisfac șirul de incluziuni

$$E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \supseteq \ldots \supseteq E_n \supseteq \ldots$$

Să se arate că intersecția lor nu este vidă

$$\cap E_i \neq \emptyset \qquad \text{(lema lui G. Cantor)}$$

R: Pentru orice $n \in N$ există $x_n \in E_n - E_{n+1}$. Să notăm

$$G_k = \{x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n, \ldots\}$$

avem incluziunile pentru orice $k \geqslant 1$:

$$G_n \subset E_k \subseteq E_1 \tag{1}$$

Urmează că G_k este mărginită și din modul cum este construită este și infinită, deci are cel puțin un punct de acumulare. Mulțimea punctelor de acumulare ale lui G_k este conținută în E_k care este închisă, deci G_k este închisă. Deoarece G_k se obține din G_1 prin suprimarea unui număr finit de termeni, urmează că mulțimea punctelor de acumulare ale lui G_k este aceeași cu mulțimea punctelor de acumulare ale lui G_1. Fie ξ un punct de acumulare al lui G; conform celor arătate mai sus ξ este punct de acumulare și al lui G_k pentru orice k. Din (1) avem $\xi \in E_k$ pentru orice k deci intersecția mulțimilor E_i nu este vidă.

5. Să se arate că $2^n > n^3$ pentru $n \geqslant 10$, $n \in N$.

R: Folosim metoda inducției matematice. Pentru $n = 10$, avem

$$2^{10} = 1024 > 10^3 = 1000.$$

Presupunem inegalitatea adevărată pînă la $n - 1$, deci

$$2^{n-1} > (n-1)^3$$

și, să arătăm că este adevărată și pentru n. Avem

$$2^{n-1} \cdot 2 > (n-1)^3 \cdot 2$$

deci trebuie să arătăm că

$$(n-1)^3 \cdot 2 > n^3$$

sau

$$(n-1)\sqrt[3]{2} > n,$$

sau

$$n(\sqrt[3]{2} - 1) > \sqrt[3]{2}.$$

Pentru $n \geqslant 10 + 1$, deoarece $\sqrt[3]{2} > 1{,}1$, avem

$$n(\sqrt[3]{2} - 1) \geqslant (10+1)(\sqrt[3]{2} - 1) > \sqrt[3]{2}$$

pentru că $10\,(\sqrt[3]{2} - 1) > 1$.

Observație. Să se studieze cazul $3^n > n^4$, $n \in N$, $n \geqslant 8$, în mod asemănător ca mai sus.

6. Să se arate că oricare ar fi n, $n \in N$ avem inegalitatea

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

R: Pentru $n = 1$, neegalitatea este adevărată, deoarece

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ sau } \frac{1}{4} < \frac{1}{3}$$

presupunem că rămîne adevărată pînă la $n - 1$, deci

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2)} < \frac{1}{\sqrt{2n-1}}$$

și să arătăm că este adevărată și pentru n. Avem

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)(2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2)2n} < \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \cdot \frac{2n-1}{2n}$$

rămîne să arătăm că

$$\frac{1}{\sqrt{2n-1}} \cdot \frac{2n-1}{2n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

sau

$$\sqrt{\frac{2n-1}{4n^2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

sau

$$(2n-1)(2n+1) \leqslant 4n^2$$

de unde

$$4n^2 - 1 \leqslant 4n^2$$

ceea ce este evident.

7. Dacă $a_1 a_2, \dots, a_n$ sînt $n \geqslant 2$ numere strict pozitive mai mici decît 1, atunci

$$(1 - a_1)(1 - a_2) \dots (1 - a_n) > 1 - (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

R: Pentru $n = 2$, avem

$$(1 - a_1)(1 - a_2) = 1 - (a_1 + a_2) + a_1 a_2 > 1 - (a_1 + a_2)$$

presupunem inegalitatea adevărată pînă la $n-1$, adică

$$(2) \qquad (1 - a_1)(1 - a_2) \dots (1 - a_{n+1}) > 1 - (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})$$

și să arătăm că este adevărată și pentru n. Înmulțim (2) cu $1 - a_n$; obținem

$$(1 - a_1)(1 - a_2) \dots (1 - a_n) > [1 - (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})](1 - a_n) =$$
$$= 1 - (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + a_n(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) >$$
$$> 1 - (a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

Observație. Dacă $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a$, rezultă

$$(1 - a)^n > 1 - na, \qquad 0 < a < 1.$$

În condițiile din enunț avem și

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) > 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Pentru $a_1 = a_2 = ... = a_n = a$, obținem neegalitatea lui Bernoulli

$$(1 + a)^n > 1 + na.$$

Pentru $a = 1$ rezultă $2^n > n + 1, \qquad n = 2, 3, ...$

8. Dacă $a_1, a_2, ..., a_n$ și $b_1, b_2, ..., b_n$ sînt $2n$ numere reale, atunci are loc neegalitatea lui Schwarz-Buniakovski $(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2) \geqslant (a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2$.

R: Considerăm expresia

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i - xb_i)^2 \geqslant 0, \qquad x \in R \tag{3}$$

care se mai scrie

$$E(x) = (\Sigma b_i^2)\, x^2 - 2x \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geqslant 0$$

discriminantul lui $E(x)$ este negativ, deci

$$\left(\sum_1^n a_i b_i\right)^2 - \sum_1^n a_i^2 \sum_1^n b_i^2 \leqslant 0$$

care este neegalitatea din enunț.

Observații. a) Din (3) rezultă că egalitatea are loc pentru

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}.$$

b) Se observă că avem efectiv

$$\left(\sum_1^n a_i' b_i\right)^2 = \left(\sum_1^n a_i^2\right)\left(\sum_1^n b_i^2\right) - \sum_{i<k=1}^{n} (a_k b_i - a_i b_k)^2.$$

c) Dacă notăm $\bar{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$, $\bar{b} = (b_1, b_2, ... b_n)$ inegalitatea din enunț se scrie

$$(\bar{a}, \bar{b})^2 \leqslant \| \bar{a} \|^2 \cdot \| \bar{b} \|^2.$$

9. Fie $a_1, a_2, ..., a_n$, n numere pozitive și

$$A = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}, \qquad G = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$$

mediile lor aritmetice și geometrice. Să se arate că $G \leqslant A$.

R: Fie a_m și a_M cel mai mic și cel mai mare dintre numerele a_i. În G și A să le înlocuim respectiv cu

$$a_m' = G, \qquad a_M' = \frac{a_m a_M}{G}$$

Deoarece $a'_m a'_M = a_m a_M$ urmează că G nu se schimbă. Dacă le înlocuim în A, avem

$$a'_M + a'_m - a_m - a_M = G + \frac{a_m a_M}{G} - a_m - a_M = \frac{(a_m - G)(a_M - G)}{G} < 0,$$

deoarece $a_m - G < 0$; prin urmare A scade.

Procedînd în acelaşi mod pînă la urmă toţi a_k vor fi înlocuiţi cu G, deci valoarea finală a lui A este G, în timp ce G rămîne neschimbat. Cum A scade, rezultă $A \geqslant G$.

Consecinţă. Neegalitatea demonstrată se mai scrie

$$a_1 a_2 \ldots a_n \leqslant \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^n$$

egalitate avem cînd $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. În această situaţie produsul lui $a_1 a_2 \ldots a_n$ este maxim.

10. Să se arate că pentru $n \geqslant 2$, $\prod_{k=0}^{n} C_n^k \leqslant \left(\frac{2^n - 2}{n-1}\right)^{n-1}$.

R: $\prod_{k=0}^{n} C_n^k = \prod_{k=1}^{n-1} C_n^k$ şi, deoarece

$$\sum_{k=1}^{n-1} C_n^k = C_n^1 + \ldots + C_n^{n-1} = 2^n - 2$$

aplicînd relaţia între media aritmetică şi media geometrică, obţinem:

$$\sqrt[n-1]{\prod_{k=0}^{n-1} C_n^k} \leqslant \frac{2^n - 2}{n-1}$$

de unde rezultă relaţia din enunţ.

11. Să se găsească punctele din planul complex Z pentru care sînt satisfăcute relaţiile

a) $|z + 1| = |z + i|$,

b) $|z + 2| + |z - 2| = 8$,

c) $|z + 2i| - |z - 2i| = 2$.

R: a) Numărul $|z + 1|$ reprezintă lungimea segmentului care uneşte punctul z cu punctul $M_1(-1, 0)$, iar $z + i$ este lungimea segmentului care uneşte punctul z cu punctul $M_2(0, -1)$, iar faptul că cele două segmente sînt egale cere ca z să se găsească pe mediatoarea segmentului $M_1 M_2$.

b) Dacă considerăm punctele $F_1(2, 0)$ şi $F_2(-2, 0)$, iar M punctul de afix z, egalitatea

$$|z + 2| + |z - 2| = 8$$

se scrie

$$\overline{MF_1} + \overline{MF_2} = 8$$

deci locul lui M este o elipsă de focare F_1 şi F_2 şi semiaxa mare 4.

c) În mod asemănător, dacă considerăm punctele de pe axa imaginară $F_1(0, -2)$ și $F_2(0, 2)$, atunci c) se scrie

$$\overline{MF}_1 - \overline{MF}_2 = 2$$

deci locul lui M este ramura hiperbolei de focare F_1 și F_2, situată deasupra axei Ox și cu semiaxa pe Oy de lungime 1.

12. Să se găsească numărul real a astfel încît

$$\arg\frac{1}{3} + \arg\frac{1}{4} + \arg\frac{1}{5} + \arg\frac{a}{6} = \frac{\pi}{2}.$$

R: Considerînd numerele complexe

$$a_1 = 3 + \mathrm{i}, \qquad a_2 = 4 + \mathrm{i},$$
$$a_5 = 5 + \mathrm{i}, \qquad a_6 = 6 + a\mathrm{i},$$

obținem (deoarece argumentul produsului este egal cu suma argumentelor)

$$\arg a_1 + \arg a_2 + \arg a_3 + \arg a_4 = \arg (a_1 a_2 a_3 a_4)$$

și, pentru ca relația din enunț să aibă loc, trebuie ca

$$a_1 a_2 a_3 a_4 = \alpha\mathrm{i}, \qquad \alpha \in R$$

Avem

$$a_1 a_2 a_3 = (3 + \mathrm{i})(4 + \mathrm{i})(5 + \mathrm{i}) = 48 + 46\,\mathrm{i}$$
$$a_1 a_2 a_3 a_4 = (48 + 46\,\mathrm{i})(6 + a\mathrm{i}) = 288 - 46\,a + \mathrm{i}(48\,a + 264)$$

și pentru

$$288 - 46a = 0, \qquad a = \frac{288}{46} = \frac{144}{23}$$

produsul $a_1 a_2 a_3 a_4$ este pur imaginar. Urmează

$$\arg\frac{1}{3} + \arg\frac{1}{4} + \arg\frac{1}{5} + \arg\frac{12}{11} = \frac{\pi}{2}.$$

13. Folosind produsul matricilor

$$M_1 = \begin{Vmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{Vmatrix}, \quad M_2 = \begin{Vmatrix} z_3 & -\bar{z}_4 \\ z_4 & \bar{z}_3 \end{Vmatrix}$$

să se arate că produsul a două sume de patru pătrate se poate scrie ca o sumă de patru pătrate.

R: Avem, făcînd înmulțirea $M_1 \times M_2$,

$$M_1 \times M_2 = \begin{Vmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} z_3 & -\bar{z}_4 \\ z_4 & \bar{z}_3 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} z_1 z_3 + z_2 z_4 & -z_1 \bar{z}_4 + z_2 \bar{z}_3 \\ -\bar{z}_2 z_3 + \bar{z}_1 z_4 & \bar{z}_2 \bar{z}_4 + \bar{z}_1 \bar{z}_3 \end{Vmatrix};$$

deoarece Det $M_1 \cdot$ Det $M_2 =$ Det $\cdot (M_1 \times M_2)$, obținem

$$(z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2)(z_3\bar{z}_3 + z_4\bar{z}_4) =$$
$$= (z_1z_3 + z_2z_4)(\bar{z}_1\bar{z}_3 + \bar{z}_2\bar{z}_4) + (\bar{z}_1z_4 - \bar{z}_2z_3)(z_1\bar{z}_4 - z_2\bar{z}_3)$$

însă

$$z_i\bar{z}_i = x_i^2 + y_i^2, \quad i = 1,2,3,4$$

și

$$z_1z_3 + z_2z_4 = x_1x_3 - y_1y_3 + x_2x_4 - y_2y_4 +$$
$$+ \mathrm{i}(x_1y_3 + y_1x_3 + x_2y_4 + y_2x_4),$$
$$\bar{z}_1z_4 - \bar{z}_2z_3 = x_1x_4 + y_1y_4 - x_2x_3 - y_2y_3 +$$
$$+ \mathrm{i}(-y_1x_4 + x_1y_4 - x_2y_3 + y_2x_3)$$

se observă că în partea a doua avem produse de numere complexe conjugate, două cîte două. Obținem deci:

$$(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2)(x_3^2 + y_3^2 + x_4^2 + y_4^2) =$$
$$= (x_1x_3 - y_1y_3 + x_2x_4 - y_2y_4)^2 + (x_1y_3 + y_1x_3 + x_2y_2 + x_4y_2)^2 +$$
$$+ (x_1x_4 + y_1y_4 - x_2x_3 - y_2y_3)^2 + (-y_1x_4 + x_1y_4 - x_2y_3 + x_3y_2)^2$$

(identitatea lui Laplace).

14. Fie $A_1A_2A_3$ un triunghi echilateral și M un punct din planul său. Să se arate că MA_1, MA_2, MA_3 sînt laturile unui triunghi (D. Pompeiu).

R: Fie z_1, z_2, z_3, z numerele complexe care corespund punctelor A_1, A_2, A_3 respectiv M. Avem

$$z_1(z_2 - z_3) + z_2(z_3 - z_1) + z_3(z_1 - z_2) = 0$$
$$z(z_2 - z_3) + z(z_3 - z_1) + z(z_1 - z_2) = 0$$

pentru orice z și z_i. Prin scădere, obținem

$$(4) \qquad (z_1 - z)(z_2 - z_3) + (z_2 - z)(z_3 - z_1) + (z_3 - z)(z_1 - z_2) = 0.$$

Triunghiul fiind echilateral,

$$|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$$

deci, aplicînd modulul lui (4) și ținînd seama de neegalitatea modulului, rezultă

$$|z_1 - z| \leqslant |z_2 - z| + |z_3 - z|,$$
$$|z_1 - z| \geqslant ||z_2 - z| - |z_3 - z||$$

și

$$|z_2 - z| \leqslant |z_3 - z| + |z_1 - z|,$$
$$|z_2 - z| \geqslant ||z_3 - z| - |z_1 - z||$$

cit și

$$|z_3 - z| \leqslant |z_1 - z| + |z_2 - z|,$$
$$|z_3 - z| \geqslant ||z_1 - z| - |z_2 - z|.|$$

15. Să se găsească condiția ca punctele z_1, z_2, z_3, z_4 să fie pe un același cerc.

R: Fie A_1, A_2, A_3, A_4 cele patru puncte care corespund la numerele complexe z_1, z_2, z_3, z_4. Pentru că patrulaterul $A_1A_2A_3A_4$ să fie inscriptibil, trebuie ca (figura 1),

$$\sphericalangle A_1A_3A_2 = \sphericalangle A_1A_4A_2$$
$$\sphericalangle A_1A_3A_2 = \pi - \arg\,(z_1 - z_3) + \arg\,(z_2 - z_3),$$
$$\sphericalangle A_1A_4A_2 = \arg\,(z_2 - z_4) - \arg\,(z_1 - z_4),$$

sau

$$\arg\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} - \arg\frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} = \arg K,$$

cu $K = +1, -1, 0$; sau

$$\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4} = K\,(\text{real}).$$

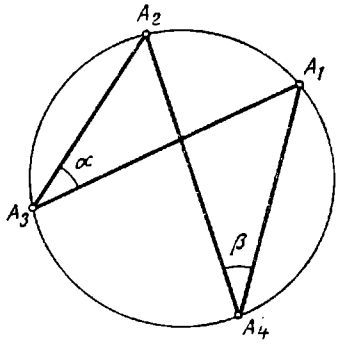

Fig. 1

Reciproc, dacă raportul anarmonic al celor patru puncte este real, rezultă imediat

$$\arg\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = \arg\frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}$$

deci cele patru puncte sînt pe același cerc.

16. Un poligon cu n laturi are două vîrfuri consecutive în z_0, z_1. Să se afle vîrful următor, z_0, z_1, z_2, fiind ordonate în sens direct (figura 2).

R: Avem $|z_2 - z_1| = |z_1 - z_0|$ deoarece poligonul este regulat. Între argumente avem relația

$$\arg\frac{z_2 - z_1}{z_1 - z_0} = \frac{2\pi}{n}$$

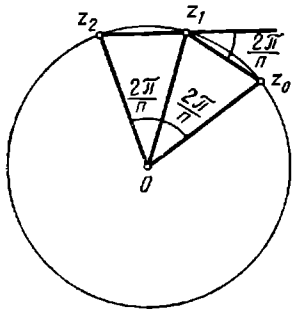

Fig. 2

deci

$$z_2 = z_1 + |z_1 - z_0|\,e^{\frac{2\pi}{n}i}.$$

17. Pentru $t \in [0, 2\pi)$ să se găsească curba descrisă de z pentru

a) $z = z_0 + r\,e^{it}$, $\quad r > 0$

b) $z = z_0 + a\,e^{it} + b\,e^{-it}$, $\quad a, b \in \mathbf{R}$.

R. Avem $|z - z_0| = |r\,e^{it}| = r$, deci în cazul a), z descrie un cerc cu centrul în punctul z_0 și rază r.

În cazul b) punem

$$z - z_0 = x - x_0 + \mathrm{i}(y - y_0)$$

$$a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + b\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} = (a + b)\,\cos t + \mathrm{i}(a - b)\,\sin t,$$

de unde rezultă

$$\frac{x - x_0}{a + b} = \cos t, \qquad \frac{y - y_0}{a - b} = \sin t.$$

Punctul z descrie elipsa $(a^2 \neq b^2)$

$$\frac{(x - x_0)^2}{(a + b)^2} + \frac{(y - y_0)^2}{(a - b)^2} = 1$$

de semiaxe $|a + b|$ și $|a - b|$ și centru (x_0, y_0).

18. Se dă mulțimea

$$G = \{(a, b) \mid a, b \in R, \qquad a \neq 0\}$$

unde R este mulțimea numerelor reale. Să se arate că față de operația $\ast$ definită de

$$(a, b) \ast (c, d) = (ac,\ bc + d)$$

mulțimea G are structura de grup.

R: Operația $*$ este asociativă. În adevăr

$$[(a, b) * (c, d)] * (e, f) = (ac,\ bc + d) * (e, f) = (ace,\ bce + de + f)$$

și

$$(a, b) * [(c, d) * (e, f)] = (a, b) * (ce,\ de + f) = (ace,\ bce + de + f)$$

adică același rezultat.

Perechea (1,0) este elementul neutru. În adevăr, dacă (x,y) este elementul neutru, trebuie să avem

$$(x,y) * (a,b) = (xa,\ ay + b) = (a,b)$$

deci

$$xa = a,\ ay + b = b,$$

cu soluția

$$x = 1,\ y = 0.$$

Perechea (a, b), $a \neq 0$ din G admite invers pe $\left(\frac{1}{a}, -\frac{a}{b}\right)$. În adevăr, ecuația

$$(a,b) * (x,y) = (1,0)$$

conduce la

$$xa = 1,\ ay + b = 0$$

care dă

$$x = \frac{1}{a},\ y = -\frac{b}{a}$$

Observație. Mulțimea $H = \{(1, b) \mid b \in R\}$, față de aceeași operație * formează un grup. Deoarece $H \subset G$, urmează că H este un subgrup al lui G.

19. Să se arate că algebra A_3 cu elementele de forma

$$a \in A_3, \ a = (a_0, a_1, a_2), \ a_i \in R$$

care satisfac condițiile

a) $\lambda \cdot a = (\lambda a_0, \lambda a_1, \lambda a_2), \quad \lambda \in R$

b) $a + b = (a_0 + b_0, \ a_1 + b_1, \ a_2 + b_2),$

c) $a \times b = (a_0b_0 + a_1b_2 + a_2b_1, \ a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_2, a_0b_2 + a_2b_0 + a_1b_1)$

este asociativă și comutativă, cu divizori ai lui zero. Să se determine divizorii lui zero.

R: Avem $a + b = b + a$, deoarece din (b) avem $a_i + b_i = b_i + a_i$, $i = 0, 1, 2$; avem și $a + (b + c) = (a + b) + c$, deci A_3 formează grup abelian față de operația $+$. Elementul neutru față de adunare este $0 = (0, 0, 0)$. Elementul opus lui a este $-a = (-a_0, -a_1, -a_2)$; $a + (-a) = 0$.

Avem $a \times b = b \times a$, cum rezultă din (c), deoarece putem permuta pe a_i cu b_i și produsul $a \times b$ nu se schimbă. Faptul că operația $\times$ este distributivă față de operația $+$, se verifică direct. Avem și $\lambda(\mu a) = \lambda\mu a$, $1 \cdot a = a$ $\lambda, \mu, 1 \in R$, deci A_3 este o algebră asociativă și comutativă. Pentru a determina divizorii lui zero, considerăm sistemul

$$a_0b_0 + a_1b_2 + a_2b_1 = 0$$

$$a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_2 = 0$$

$$a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 = 0$$

și vedem în ce condiții $a \times b = 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Pentru ca sistemul să nu admită numai soluția $a_0 = a_1 = a_2 = 0$, trebuie ca determinantul

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} b_0 & b_2 & b_1 \\ b_1 & b_0 & b_2 \\ b_2 & b_1 & b_0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(b_0 + b_1 + b_2)((b_1 - b_2)^2 + (b_2 - b_0)^2 + (b_0 - b_1)^2)$$

să fie nul, care conduce la următoarele condiții

1) $$b_0 + b_1 + b_2 = 0$$

și

2) $$b_0 = b_1 = b_2.$$

Condiția (1) dă pentru a

(1') $$a_0 = a_1 = a_2$$

iar (2)

$$a_0 + a_1 + a_2 = 0. \tag{2'}$$

Deci divizorii lui zero în algebră sînt formaţi de numerele a, b cu $a_0 + a_1 + a_2 = 0$, $b_0 = b_1 = b_2$. Dacă înlocuim în (c), obţinem

$$a \times b = (0, 0, 0),$$

deşi $a \neq 0$, $b \neq 0$.

20. Să se arate că algebra A_3 de la exerciţiul precedent este izomorfă cu algebra $\mathcal{A}_3$, de elemente

$$a = \theta_0 a_0 + \theta_1 a_1 + \theta_2 a_2$$

cu elementele hipercomplexe θ_i, i = 0, 1, 2 legate prin relaţiile

(5)

×	θ_0	θ_1	θ_2
θ_0	θ_0	θ_1	θ_2
θ_1	θ_1	θ_2	θ_0
θ_2	θ_2	θ_0	θ_1

b) Să se arate că algebra A_3 este izomorfă cu algebra A_3' de elemente

$$a = e_0 a_0 + e_1 a_1 + e_2 a_2,$$

unde e_i sînt matricele

$$(6) \quad e_0 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad e_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad e_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

R: a) Din (5) se deduce că $\mathcal{A}_3$ este comutativă deoarece $\theta_i\theta_j = \theta_j\theta_i$, deci şi $a \times b = b \times a$. Rămîne să mai arătăm că avem aceeaşi lege de înmulţire (c).

$$a \times b = (\theta_0 a_0 + \theta_1 a_1 + \theta_2 a_2) \times (\theta_0 b_0 + \theta_1 b_1 + \theta_2 b_2) =$$

$$= \theta_0(a_0 b_0 + a_1 b_2 + a_2 b_1) + \theta_1(a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_2 b_2) + \theta_2(a_0 b_2 + a_2 b_0 + a_1 b_1).$$

b) Este suficient să probăm că elementele hipercomplexe e_i verifică relaţiile din tabloul (5). Avem

$$e_0 \times e_0 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = e_0 .$$

Avem şi

$$e_0 \times e_i = e_i \times e_0, \quad i = 1, 2,$$

deoarece e_0 este matricea unitate.

$$e_1 \times e_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = e_0$$

$$e_2 \times e_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = e_0$$

$$e_1 \times e_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} = e_2$$

$$e_2 \times e_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} = e_1.$$

Matricial, un număr $a \in A_3'$ se scrie

$$a = \begin{Vmatrix} a_0 & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 \end{Vmatrix},$$

iar divizorii lui zero sînt numerele $a \in A_3'$ pentru care determinantul lui a este nul.

21. Să se arate că mulţimea A a elementelor de forma

$$a = (a_1, a_2, a_3, a_4), \qquad a_i \in R$$

care satisfac condiţiile

a) $\lambda a = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3, \lambda a_4), \qquad \lambda \in R$

b) $a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4),$

c) $a \times b = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4),$

unde

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4, \\ \alpha_2 &= a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_1 - a_4b_3, \\ \alpha_3 &= a_1b_3 + a_3b_1 - a_2b_4 + a_4b_2, \\ \alpha_4 &= a_1b_4 + a_4b_1 + a_2b_3 - a_3b_2, \end{aligned} \tag{7}$$

formează o algebră necomutativă, fără divizori ai lui zero.

R: Avem $a + b = b + a$, deoarece în (b) $a_i + b_i = b_i + a_i$; pentru $\lambda = 0$, obţinem $0 \cdot a = (0, 0, 0, 0)$. Numărul $(0, 0, 0, 0) = 0$ este elementul neutru în operaţia de adunare. Opusul lui a este $-a = (-a_1, -a_2, -a_3, -a_4)$. Avem şi $a + (b + c) = (a + b) + c$, deci A formează un grup abelian faţă de operaţia $+$. Condiţia (a), adăugată celor de mai sus, arată că A formează un spaţiu vectorial pe corpul R.

Rămîne să mai arătăm că operaţia $\times$ este asociativă, deoarece nu este comutativă, cum rezultă tot din (7), pentru că α_i nu se reproduc dacă înlocuim pe a_k cu b_k şi reciproc, $k = 1, 2, 3, 4$. Se verifică direct că $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$. Să arătăm că algebra este fără divizori ai lui zero. Pentru aceasta este suficient să dovedim că sistemul $\alpha_i = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, fie în necunoscutele a_i, $(b_k \neq 0)$, fie în $b_k (a_i \neq 0)$, nu admite decît soluţia banală. Determinantul sistemului (cu a_i necunoscute) este

$$D = \begin{vmatrix} b_1 & -b_2 & -b_3 & -b_4 \\ b_2 & b_1 & b_4 & -b_3 \\ b_3 & -b_4 & b_1 & b_2 \\ b_4 & b_3 & -b_2 & b_1 \end{vmatrix} =$$

$$= (b_1^2 + b_2^2)^2 + (b_1 b_4 + b_2 b_3)^2 + (b_1 b_3 - b_2 b_4)^2 +$$

$$+ (b_2 b_4 - b_1 b_3)^2 + (b_2 b_3 + b_1 b_4)^2 + (b_3^2 + b_4^2)^2$$

care este nul numai pentru $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 0$. Dacă luăm pe b_i necunoscute, determinantul sistemului (7) este

$$D^* = \begin{vmatrix} a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ a_2 & a_1 & -a_4 & a_3 \\ a_3 & a_4 & a_1 & -a_2 \\ a_4 & -a_2 & a_2 & a_1 \end{vmatrix} =$$

$$= (a_1^2 + a_2^2)^2 + (a_1 a_4 - a_2 a_3)^2 + (a_1 a_3 + a_2 a_4)^2 +$$

$$+ (a_2 a_4 + a_1 a_3)^2 + (a_2 a_3 - a_1 a_4)^2 + (a_3^2 + a_4^2)^2$$

care de asemenea nu este nul decît pentru $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$.
Se observă că

$$D = (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2)^2$$

şi

$$D^* = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)^2.$$

22. Să se arate că algebra A de la exerciţiul precedent este izomorfă cu algebra quaternionilor $\mathcal{A}$, unde $a \in \mathcal{A}$ are forma

$$a = \mathrm{e}\, a_1 + \mathrm{i}\, a_2 + \mathrm{j}\, a_3 + \mathrm{k}\, a_4, \qquad a_i \in R$$

elemente hipercomplexe e, i, j, k satisfăcînd legile de înmulțire date de următorul tablou:

×	e	i	j	k
e	e	i	j	k
i	i	−i	k	−j
j	j	−k	−l	−i
k	k	−j	−i	−l

Să se determine apoi inversul unui număr $a \neq 0$ din $\mathcal{A}$.

R: Este suficient să arătăm că produsul $a \times b$ este dat după regula (c) de la exercițiul precedent. Avem

$$a \times b = (ea_1 + ia_2 + ja_3 + ka_4) \times (eb_1 + ib_2 + jb_3 + kb_4) =$$
$$= e(a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4) + i(a_1b_2 + a_2b_1 - a_4b_3 +$$
$$+ a_3b_4) + j(a_1b_3 + a_3b_1 - a_4b_2 + a_2b_4) + k(a_1b_4 + a_4b_1 + a_2b_3 - a_3b_2)$$

Pentru a determina inversul la dreapta x al lui a trebuie să rezolvăm ecuația $x \times a = e$. Obținem sistemul

$$x_1a_1 - x_2a_2 - x_3a_3 - x_4a_4 = 1$$
$$x_1a_2 + x_2a_1 + x_3a_4 - x_4a_3 = 0$$
$$x_1a_3 - x_2a_4 + x_3a_1 + x_4a_2 = 0$$
$$x_1a_4 + x_2a_3 - x_3a_2 + x_4a_1 = 0$$

$$D_{x_1} = \begin{vmatrix} a_1 & a_4 & -a_3 \\ -a_4 & a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 & a_1 \end{vmatrix} = a_1(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2).$$

În mod asemănător se găsește

$$D_{x_2} = -a_2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2),$$
$$D_{x_3} = -a_3(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2),$$
$$D_{x_4} = -a_4(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2),$$

deci

$$x = \frac{1}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}(ea_1 - ia_2 - ja_3 - ka_4).$$

Pentru a determina inversul la stînga y al lui a, rezolvăm ecuația $a \times y = e$; obținem sistemul

$$a_1y_1 - a_2y_2 - a_3y_3 - a_4y_4 = 1,$$
$$a_2y_1 + a_1y_2 - a_4y_3 + a_3y_4 = 0,$$

$$a_3y_1 + a_4y_2 + a_1y_3 - a_2y_4 = 0,$$
$$a_4y_1 - a_3y_2 + a_2y_3 + a_1y_4 = 0,$$

de unde

$$D_{y_1} = \begin{vmatrix} a_1 & -a_4 & a_3 \\ a_4 & a_1 & -a_2 \\ -a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix} = a_1(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)$$

$$D_{y_2} = -\begin{vmatrix} a_2 & -a_4 & a_3 \\ a_3 & a_1 & -a_2 \\ a_4 & a_2 & a_1 \end{vmatrix} = -a_2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2) \text{ etc.}$$

deci $x = y$; inversul este unic. Dacă notăm

$$\bar{a} = \mathrm{e}\, a_1 - \mathrm{i} a_2 - \mathrm{j}\, a_3 - \mathrm{k}\, a_4$$

obținem

$$a \times \bar{a} = \bar{a} \times a = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2.$$

23. Să se arate că mulțimea G a elementelor de forma

$$a = (a_0, a_1, a_2, a_3), \qquad a_i \in R$$

care satisfac condițiile

a) $\lambda a = (\lambda a_0, \lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3), \qquad \lambda \in R$

b) $a+b = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3),$

c) $a \times b = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

cu

$$\alpha_0 = a_0b_0, \ \alpha_1 = a_0b_1 + a_1b_0$$
$$\alpha_2 = a_0b_2 + a_2b_0, \ \alpha_3 = a_0b_3 + a_3b_0 + a_1b_2 - a_2b_1 \tag{8}$$

formează o algebră necomutativă, cu divizori ai lui zero. Să se determine divizorii lui zero.

R: Avem $a+b = b+a$ deoarece în (b), $a_i + b_i = b_i + a_i$.

$0 \cdot a = (0, 0, 0, 0)$ și elementul neutru față de operația plus este $0 = (0, 0, 0, 0)$. Opusul lui a este $-a = (-a_0, -a_1, -a_2, -a_3)$. Din (b) rezultă că adunarea este și asociativă, deci G formează grup abelian față de operația $+$. Cu condiția (a) urmează că G formează și un spațiu vectorial:

Se vede că $a \times b \neq b \times a$, deci produsul definit de (c) nu este comutativ. Faptul că operația $\times$ este asociativă și distributivă față de operația $+$ se verifică direct ținînd seama de (b) și (c). Să arătăm că algebra are divizori ai lui zero.

Sistemul $\alpha_i = 0, \qquad i = 0, 1, 2, 3,$ se scrie

$$\begin{cases} a_0b_0 = 0 \\ a_0b_1 + a_1b_0 = 0, \\ a_0b_2 + a_2b_0 = 0, \\ a_0b_3 + a_3b_0 + a_1b_2 - a_2b_1 = 0. \end{cases} \tag{9}$$

și este un sistem omogen în necunoscutele a_0, a_1, a_2, a_3 cu determinantul sistemului

$$\Delta = \begin{vmatrix} b_0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_0 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & b_0 & 0 \\ b_3 & b_2 & -b_1 & b_0 \end{vmatrix} = b_0^4$$

Sistemul admite și alte soluții în afară de soluția banală $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$, $b_0 = 0$. În adevăr, dacă $b_0 = 0$, pentru orice b_1, b_2, $b_3 \in R$, sistemul admite soluția $a_0 = 0$, $a_1 = \lambda b_1$, $a_2 = \lambda b_2$, $a_3 \in R$. Prin urmare două numere $a = (0, \lambda b_1, \lambda b_2, a_3)$, $b = (0, b_1, b_2, b_3)$ sînt divizori ai lui zero. Dacă facem produsul lui b cu el însuși obținem

$$b \times b = b^2 = (0, 0, 0, 0)$$

se spune că b este un element *nilpotent* în algebra G.

Dacă în sistemul (2) considerăm pe b_i nedeterminați avem

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & a_0 & 0 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{vmatrix} = a_0^4$$

deci același rezultat.

24. Să se arate că algebra G de la exercițiul precedent este izomorfă cu algebra lui Grassmann $\mathcal{G}_4$, unde $a \in \mathcal{G}_4$ are forma

$$a = e_0 a_0 + e_1 a_1 + e_2 a_2 + e_1 e_2 a_3, \qquad a_i \in R$$

elementele hipercomplexe e_i satisfăcînd legile de înmulțire date de următorul tablou

×	e_0	e_1	e_2
e_0	e_0	e_1	e_2
e_1	e_1	0	e_1e_2
e_2	e_2	$-e_1e_2$	0

Să se determine apoi inversul unui număr a, care nu este un divizor al lui zero.

R: Este suficient să arătăm că produsul $a \times b$ este dat după regula (c) de la exercițiul precedent. Avem

$$a \times b = e_0(a_0 b_0) + e_2(a_0 b_2 + a_2 b_0) + e_1(a_0 b_1 + a_1 b_0) +$$
$$+ e_1 e_2(b_0 a_3 + a_3 b_0 + a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Pentru a determina inversul la dreapta x al lui a trebuie să rezolvăm ecuația $x \times a = e_0$, care conduce la sistemul

$$\begin{cases} x_0a_0 = 1 \\ x_0a_1 + x_1a_0 = 0 \\ x_0a_2 + x_2a_0 = 0 \\ x_0a_3 + x_1a_2 - x_2a_1 + x_3a_0 = 0 \end{cases}$$

$$D_{x_0} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & 0 \\ 0 & a_2 & -a_1 & a_0 \end{vmatrix} = a_0^3, \quad D_{x_1} = \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & a_0 & 0 \\ a_3 & 0 & -a_1 & a_0 \end{vmatrix} = -a_1a_0^2$$

$$D_{x_2} = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 1 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & 0 & a_0 \end{vmatrix} = -a_2a_0^2; \quad D_{x_3} = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & 1 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & -a_1 & 0 \end{vmatrix} = -a_3a_0^2$$

deci

$$x = \frac{1}{a_0} e_0 - \frac{a_1}{a_0^2} e_1 - \frac{a_2}{a_0^2} e_2 - \frac{a_3}{a_0^2} e_1e_2, \quad a_0 \neq 0$$

Pentru a determina inversul la stînga y al lui a rezolvăm ecuația $a \times y = e_0$. Obținem sistemul

$$\begin{cases} a_0y_0 = 1 \\ a_1y_0 + a_0y_1 = 0, \\ a_2y_0 + a_0y_2 = 0 \\ a_3y_0 - a_2y_1 + a_1y_2 + a_0y_3 = 0, \end{cases}$$

$$D_{y_0} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{vmatrix} = a_0^3; \quad D_{y_1} = \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & a_0 & 0 \\ a_3 & 0 & a_1 & a_0 \end{vmatrix} = -a_1a_0^2$$

$$D_{y_2} = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 1 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & -a_2 & 0 & a_0 \end{vmatrix} = -a_2a_0^2; \quad D_{y_3} = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & 1 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & a_0 & 0 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & 0 \end{vmatrix} = -a_3a_0^2,$$

deci $y = x$ și inversul este unic.

25. Să se arate că

$$\sin^{2m}\theta = \frac{1}{2^{m-1}}\left[\frac{1}{2}C_{2m}^{m} - C_{2m}^{m-1}\cos 2\theta + \ldots + (-1)^m C_{2m}^{2m}\cos 2m\theta\right]$$

$$\cos^{2m}\theta = \frac{1}{2^{2m-1}}\left[\frac{1}{2}C_{2m}^{m} + C_{2m}^{m-1}\cos 2\theta + \ldots + C_{2m}^{2m}\cos 2m\theta\right].$$

R: Avem, după formula binomului lui Newton:

$$(u+v)^{2m} = (u^{2m} + v^{2m}) + C_{2m}^{1}uv(u^{2m-2} + v^{2m-2}) + \ldots + C_{2m}^{m}u^m v^m$$

Dacă punem $u = e^{i\theta}$, $v = e^{-i\theta}$, obținem imediat

$$2^{2m-1}\cos^{2m}\theta = \cos 2m\theta + C_{2m}^{1}\cos(2m-2)\theta + \ldots + \frac{1}{2}C_{2m}^{m};$$

dacă scriem $u = e^{i\theta}$, $v = -e^{-i\theta}$, rezultă și

$$2^{2m-1}(-1)^m \sin^{2m}\theta = \cos 2m\theta - C_{2m}^{1}\cos(2m-2)\theta + \ldots + (-1)^m\frac{1}{2}C_{2m}^{m}.$$

26. Să se arate că

$$1 - \frac{1}{3}C_n^2 + \frac{1}{9}C_n^4 - \frac{1}{27}C_n^6 + \ldots = 2^n 3^{-\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{6}$$

$$C_n^1 - \frac{1}{3}C_n^3 + \frac{1}{9}C_n^5 - \frac{1}{27}C_n^7 + \ldots = 2^n 3^{-\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{6}.$$

R. Pornim de la egalitatea

$$\left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^n = 1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}C_n^1 - \frac{1}{3}C_n^2 - i\frac{\sqrt{3}}{9}C_n^3 + \frac{1}{9}C_n^4 - \ldots$$

și de la egalitatea

$$\left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^n = \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^n = 2^n 3^{-\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{6} + i\sin\frac{n\pi}{6}\right)$$

de unde obținem

$$2^n 3^{-\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{6} = 1 - \frac{1}{3}C_n^2 + \frac{1}{9}C_n^4 - \frac{1}{27}C_n^6 + \ldots$$

$$2^n 3^{-\frac{n-1}{2}}\sin\frac{n\pi}{6} = C_n^1 - \frac{1}{3}C_n^3 + \frac{1}{9}C_n^5 - \frac{1}{27}C_n^7 + \ldots$$

27. Pentru orice pereche de numere reale x, y

a) $$|x+y| \leqslant |x| + |y|$$

b) $$||x| - |y|| \leqslant |x-y|,$$

(generalizare $|x - y_1 \ldots - y_n| \geqslant ||x| - |y_1| - \ldots - |y_n|)$

R: a) Dacă x și y sînt de același semn, atunci inegalitatea se transformă în egalitate.

Fie $y \geqslant 0$, $x \leqslant 0$. În acest caz $x + y \leqslant y \leqslant y + |x| = |y| + |x|$ și în același timp: $x + y \geqslant x \geqslant x - |y| \geqslant -|x| - |y|$, deci, prima inegalitate este satisfăcută.

b) Putem scrie că

$$|x| = |y + (x - y)| \leqslant |y| + |x - y|$$

$$|y| = |x + (y - x)| \leqslant |x| + |y - x|.$$

Scăzînd:

$$-|y - x| \leqslant |x| - |y| \leqslant |x - y|,$$

ceea ce demonstrează și cea de-a 2-a inegalitate.

Generalizarea se demonstrează prin inducție.

28. Să se arate că:

a) $|x| = \max(x, -x)$

b) $\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$

c) $\min(x, y) + \max(x, y) = x + y$.

R: a) Din definiția modulului rezultă că

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

deci dacă $x \geqslant 0$, atunci $\max(x, -x) = x = |x|$

Dacă $x < 0$, atunci $\max(x, -x) = -x = |x|$.

b) Presupunem $x > y > 0$. În acest caz relația de mai sus devine

$$x = \frac{1}{2}(x + y + x - y)$$

care este evidentă.

Pentru $x = y$ este de asemenea evidentă.

Să considerăm $x < 0$, $y > 0$ și $|x| > y$; în acest caz

$$\max(x, y) = y \quad \text{și} \quad \frac{1}{2}(x + y + |x - y|) = \frac{1}{2}(x + y + y - x) = y.$$

Celelalte cazuri posibile se reduc la acesta permutînd între ele variabilele x și y.

c) relația este evidentă, deoarece mulțimea numerelor reale este total ordonată.

29. Mulțimea $\mathfrak{C}_2$ a perechilor (m, n) de numere naturale este numărabilă.

R: Să considerăm perechea (m, n) cu $m + n = \text{constant}$; pentru $m + n = 2, 3, 4, 5, \ldots, k, \ldots$ obținem

(1,1),

(1,2); (2,1),

(1,3); (2,2); (3,1),

(1,4); (2,3); (3,2); (4,1),

.....

(1, k—1); (2, k—2); ...; (k—1, 1),

de unde se vede că pentru $m+n=k$, avem $k-1$ perechi. Rezultă că putem realiza o corespondenţă biunivocă între mulţimea perechilor (m, n) şi mulţimea numerelor naturale N, deci mulţimea $(m, n)_{m\in N,\ n\in N}$ este numărabilă.

Consecinţă. Dacă notăm $\frac{m}{n}=(m, n)$, $n\neq 0$, urmează că mulţimea numerelor raţionale este o submulţime a mulţimii $\mathfrak{A}_2$, deci este de asemenea numărabilă.

30. Mulţimea $\mathfrak{M}_s$ a tuturor grupelor ordonate de s numere naturale

$$(m_1, m_2, ..., m_s)$$

este numărabilă.

R: Să observăm că $\mathfrak{M}_2$ este numărabilă, deoarece este o submulţime a lui $\mathfrak{A}_2$ care este numărabilă. Să presupunem afirmaţia adevărată pînă la p, deci $\mathfrak{M}_p$ este numărabilă şi să arătăm că şi $\mathfrak{M}_{p+1}$ este numărabilă. Dacă la gruparea

$$(m_1, m_2, ..., m_p)$$

adăugăm pe rînd 1, 2, ..., q, ... fiecărui număr $n\in N$ îi corespunde o nouă grupare de $p+1$ numere naturale ordonate. Dacă operăm cu fiecare grupare din $\mathfrak{M}_p$ obţinem astfel o mulţime $M_{p+1}\subseteq\mathfrak{M}_{p+1}$. Invers, dacă considerăm o grupare oarecare din $\mathfrak{M}_{p+1}$, anume

$$(m_1, m_2, ..., m_p, m_{p+1})$$

ea aparţine şi lui M_{p+1}, deoarece poate fi considerată ca obţinută din gruparea $(m_1, m_2, ..., m_p)$ prin adăugarea elementului m_{p+1}; rezultă $\mathfrak{M}_{p+1}\subseteq M_{p+1}$, deci $\mathfrak{M}_{p+1}=M_{p+1}$. Mulţimea M_{p+1} este numărabilă, fiind o reuniune numărabilă de mulţimi numărabile, prin urmare şi $\mathfrak{M}_{p+1}$ este numărabilă.

Consecinţa 1. Deoarece la fiecare grupare $(m_1, m_2, ..., m_p)$ ordonată corespunde un număr finit de grupări făcute cu numerele $m_1, m_2, ..., m_p$, grupări care nu sînt în mod necesar ordonate, urmează că mulţimea $\mathfrak{M}_p^*$ a tuturor grupărilor $(m_1, m_2, ..., m_p)$ cu m_i numere naturale este de asemenea numărabilă.

Consecinţa 2. Mulţimea polinoamelor cu coeficienţi raţionali

$$P_n(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n$$

este numărabilă.

31. Fie $n\in N$ şi $P_n=\{k\in N\mid k$ este divizor al lui $n\}$. Pentru $a, b\in P_n$ definim relaţia de ordine $a\preccurlyeq b$, care înseamnă că a este un divizor pentru b.

Să se arate că P_n cu ordinea $\preccurlyeq$ este o mulţime parţial ordonată.

Să se determine condiţiile necesare şi suficiente ca P_n să fie liniar ordonată.

R: Pentru a arăta că mulțimea P_n este parțial ordonată trebuie verificate următoarele 3 condiții

1) $a \preccurlyeq a$. 2) $a \preccurlyeq b,\ b \preccurlyeq a \to a = b$.

3) $a \preccurlyeq b,\ b \preccurlyeq c \to a \preccurlyeq c;\quad a, b, c \in P_n$.

Primele 2 afirmații sînt banale; pentru a 3-a fie $k_1 \preccurlyeq k_2, k_2 \preccurlyeq k_3 \to k_2 = k_1 p$ și $k_3 = k_2 q,\quad p, q \in N$.

Rezultă $k_3 = k_1(p, q)$.

Pentru a arăta că P_n este liniar ordonată trebuie să fie verificată în plus condiția

$$k_1, k_2 \in P_n \to k_1 \preccurlyeq k_2 \quad \text{sau} \quad k_2 \preccurlyeq k_1.$$

Trebuie deci să avem în același timp $n = mk_1$ și $n = pk_2$ de unde $k_2 = sk_1$ și $m, p, s \in N$.

Rezultă

$$k_2 = \frac{m}{p} k_1 = sk_1 \quad \text{sau} \quad m = sp,$$

deci $n = spk_1 = pk_2$.

Continuînd raționamentul, deducem că numărul n în acest caz este de forma $n = mk,\ m \in N$.

32. Fie A o mulțime finită; să notăm cu $n(A)$ numărul de elemente din mulțimea A. Să se arate că

1° $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

2° Să se extindă rezultatul la $n(A \cup B \cup C)$ apoi să se generalizeze la $n[\bigcup_1^p A_i]$.

R: p) $n(A \cup B)$ reprezintă numărul total de elemente din mulțimile A și B.

$n(A) + n(B)$ reprezintă numărul elementelor din A la care se adaugă numărul elementelor din B; astfel elementele ce aparțin lui A și B se socotesc de 2 ori, deci trebuie scăzute odată.

Pentru 2° avem:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A \cup B) + n(C) - n[(A \cup B) \cap C)] =$$
$$= n(A) + n(B) - n(A \cap B) + n(C) - n((A \cap C) \cup (B \cap C)) =$$
$$= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - [n(A \cap C) + n(B \cap C) -$$
$$- n(A \cap B \cap C)] = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) -$$
$$- n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$

Pentru cazul general se găsește

$$n\left[\bigcup_1^p A_i\right] = \sum_1^p n(A_1) - \sum_{i<j} n(A_i \cap A_j) + \ldots +$$
$$+ (-1)^{p-1} n(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_p).$$

33. Să se determine interiorul și frontiera mulțimilor

$$A = \{x \in R^n,\ |x| \leqslant 1\},$$

$$B = \{x \in R^n,\ |x| = 1\},$$

$$C = \{x \in R^n,\ x = (x_1, ..., x_n),\ x_i \text{ rațional},\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

în raport cu mulțimea R^n.

R: $\mathring{A} = \{x \in R^n;\ |x| < 1\}$, $\operatorname{Fr} A = \{x \in R^n,\ |x| = 1\}$;

$\mathring{B} = \varnothing$; $\operatorname{Fr} B = B$;

$\mathring{C} = \varnothing$; $\operatorname{Fr} C = C$, deoarece orice vecinătate $V_r(x)$ a unui punct x cu componente raționale conține atît numere cu componente raționale cît și iraționale.

34. Fie Q mulțimea numerelor raționale.

Să se arate că $[\sqrt{2}, \sqrt{3}] \cap Q$ este o mulțime deschisă relativă la Q (Dacă X este un spațiu topologic și $Y \subset X$, atunci spunem că o mulțime $V \subset Y$ este relativ deschisă dacă și numai dacă există o mulțime U deschisă în X pentru care $V = U \cap Y$).

R: $X = R$, $Y = Q$, $[\sqrt{2}, \sqrt{3}] \cap Q = (\sqrt{2}, \sqrt{3}) \cap Q$.

35. Să se arate că mulțimea $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$ este o mulțime deschisă raportată la mulțimea $[0,1]$, dar nu este deschisă în mulțimea R.

R. Observăm că:

$$\left(\frac{1}{2}, 1\right] = \left(\frac{1}{2}, 2\right) \cap [0,1] \text{ și } \left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

este deschisă în $[0,1]$

Mulțimea $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$ nu este o mulțime deschisă în R.

36. A este o mulțime deschisă în spațiul metric E și $\bar{A}$ închiderea lui A.

Să se arate că pentru orice mulțime $B \subset E$, $A \cap \bar{B} \subset \overline{A \cap B}$.

R: Fie $x \in A \cap \bar{B}$. Fie $V(x)$ o vecinătate oarecare a lui x, pentru care $V(x) \subset A$ (A este mulțime deschisă). Deoarece $\bar{B}$ este închiderea lui B, $V(x) \cap B \neq \varnothing$.

Deci,

$$V(x) \cap (A \cap B) = (V(x) \cap A) \cap B = V(x) \cap B \neq \varnothing,$$

ceea ce arată că $x \in \overline{A \cap B}$.

Să considerăm următorul caz particular:

$$A = [1, 2], \quad B = (2, 3]$$

în această situație $\bar{B} = [2, 3]$, $A \cap \bar{B} = \{2\}$

$$A \cap B = \varnothing, \quad \overline{A \cap B} = \varnothing$$

incluziunea din enunț nu este adevărată, deoarece A nu este mulțime deschisă.

37. Fie E un spațiu topologic și $\mathfrak{L}$ familia acelor submulțimi A din E pentru care $A \cap \bar{B} \subset \overline{A \cap B}$ pentru fiecare $B \subset E$. ($\bar{B}$ este închiderea lui B).

Să se arate că dacă $A \in \mathfrak{L}$, atunci A este o mulțime deschisă.

R: Fie $B = E - A$. Atunci $A \cap \overline{E - A} \subset \overline{A \cap E - A} = \varnothing$, deci $A \cap \overline{E - A} = \varnothing$; prin urmare $x \in \overline{E - A} \to x \in E - A$; rezultă $E - A$ închisă, iar A deschisă.

38. Fie A și B două mulțimi din spațiul metric E.

1) dacă $A \subset B$, atunci $\bar{A} \subset \bar{B}$;

2) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

R : 1) Fie $x \in \bar{A}$; oricare ar fi $U(x)$, o vecinătate a lui x, $U(x) \cap A \neq \varnothing$; deoarece $A \subset B$, urmează $U(x) \cap B \neq \varnothing$.

2) Avem $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$;

$$\bar{A} \subset \overline{A \cup B}, \quad \bar{B} \subset \overline{A \cup B}, \text{ deci } \bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B}.$$

Pentru a demonstra că $\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cup \bar{B}$, observăm că $\bar{A} \cup \bar{B}$ este o mulțime închisă cu $A \cup B \subset \bar{A} \cup \bar{B}$, iar $\overline{A \cup B}$ este cea mai mică mulțime închisă care conține pe $A \cup B$, deci, $\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cup \bar{B}$.

Exemplu: $A = [1, 4)$, $B = (2, 5)$

$$A \cup B = [1, 5), \quad \overline{A \cup B} = [1, 5]$$

$$\bar{A} = [1, 4], \quad \bar{B} = [2, 5], \quad \bar{A} \cup \bar{B} = [1, 5].$$

39. Fie A o mulțime din spațiul metric E; să se arate că

1) dacă A este deschisă:

$$A \subset \mathring{A}$$

și dacă $A \subset B$ sînt mulțimi oarecare

$$\mathring{A} \subset \mathring{B};$$

2) dacă A este închisă:

$$A \supset \overline{A}$$

și dacă $A \subset B$ sînt mulțimi oarecare,

$$\overline{A} \subset \overline{B};$$

3) $(\mathring{\bar{A}}) \subset \mathring{A}$, $\overline{\mathring{A}} \subset (\overline{\mathring{A}})$;

4) Să se exemplifice pe o mulțime $A \subset R$ pentru care să se calculeze A, $\bar{A}$, $\mathring{A}$, $\overline{\mathring{A}}$, $\mathring{\bar{A}}$, $\overline{\mathring{A}}$, $\mathring{\overline{A}}$.

R: 1) $\mathring{A}$ fiind interiorul mulțimii $\bar{A}$ este cea mai mare mulțime deschisă pentru care $\mathring{A} \subset \bar{A}$. Deoarece A este o altă mulțime deschisă din $\bar{A}$, urmează

$$A \subset \mathring{\bar{A}}.$$

Dacă $A \subset B$ atunci, ținînd seama de problemele 38, 40, rezultă relația $\mathring{\bar{A}} \subset \mathring{\bar{B}}$.

2) $\bar{\mathring{A}}$ este cea mai mică mulțime închisă care conține pe $\mathring{A}$. Deoarece A este o mulțime închisă și $A \supset \mathring{A}$,

$$A \supset \bar{\mathring{A}}.$$

Pentru $A \subset B$, $\bar{\mathring{A}} \subset \bar{\mathring{B}}$ rezultă din problemele 38, 40.

3) Pentru orice mulțime A, sînt adevărate incluziunile

$$\mathring{A} \subset A \subset \bar{A}$$

din 1) și din $\mathring{A} \subset A$ rezultă $\mathring{\bar{A}} \subset \mathring{A}$;

din 2) și din $A \subset \bar{A}$ rezultă $\bar{\mathring{A}} \subset \bar{A}$.

4) Fie $A = [0,1) \cup \{2\} \cup [3,4)$

$$\mathring{A} = (0,\ 1) \cup (3,\ 4), \quad \bar{A} = [0,\ 1] \cup \{2\} \cup [3,\ 4],$$

$$\mathring{\bar{A}} = (0,\ 1) \cup (3,\ 4), \quad \bar{\mathring{A}} = [0,\ 1] \cup [3,\ 4],$$

$$\mathring{\bar{A}} = (0,\ 1) \cup (3,\ 4), \quad \bar{\mathring{A}} = [0,\ 1] \cup [3,\ 4].$$

40. Fie A și B mulțimi din spațiul metric E.

Să se arate că

1) dacă $A \subset B$, atunci $\mathring{A} \subset \mathring{B}$;

2) $\widehat{A \cap B} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.

R: 1) Fie $x \in \mathring{A}$; există o vecinătate $U(x)$, $U(x) \subset A \subset B$; deci $U(x) \subset B$; prin urmare x este punct interior mulțimii B, $x \in \mathring{B}$.

2) Știm că $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$, aplicînd 1) obținem:

$$\widehat{A \cap B} \subset \mathring{A}, \quad \widehat{A \cap B} \subset \mathring{B},$$

de unde

$$\widehat{A \cap B} \subset \mathring{A} \cap \mathring{B}. \qquad (\alpha)$$

Pe de altă parte: $\mathring{A} \cap \mathring{B}$ este o mulțime deschisă conținută în $A \cap B$ și, deoarece interiorul mulțimii $A \cap B$ este cea mai mare mulțime deschisă conținută în $A \cap B$, urmează

$$\overset{\circ}{A \cap B} \subset A \cap B$$

deci $\overset{\circ}{A \cap B}$ conține orice altă submulțime deschisă a lui $A \cap B$, de unde:

$$\mathring{A} \cap \mathring{B} \subset \overset{\circ}{A \cap B}. \qquad (\beta)$$

Din (α) și (β) rezultă 2°) din enunț.

Exemplu: $A = [1, 4)$, $B = (2, 4]$

$$\mathring{A} = (1, 4), \quad \mathring{B} = (2, 4)$$

$$A \cap B = (2, 4), \quad \overset{\circ}{A \cap B} = (2, 4)$$

$$\mathring{A} \cap \mathring{B} = (2, 4).$$

41. Fie E un spațiu metric. Pentru orice mulțime $A \subset E$ să se arate că

2) $$\mathrm{Fr}(A) = \bar{A} - \mathring{A},$$

$$\mathrm{Fr}(\bar{A}) \subset \mathrm{Fr}(A).$$

3) Pentru orice mulțimi A și $B \subset E$

$$\mathrm{Fr}(A \cup B) \subset \mathrm{Fr}\, A \cup \mathrm{Fr}\, B.$$

R. 1) Din definiția frontierei unei mulțimi:

$$\mathrm{Fr}(A) = \bar{A} \cap (\overline{E - A}).$$

Demonstrăm că $\bar{A} \cap (\overline{E - A}) \subset \bar{A} - \mathring{A}$.

Fie $x \in \bar{A} \cap (\overline{E - A})$. Aceasta înseamnă că $x \in \bar{A}$ și $x \in \overline{E - A}$. Deci oricare ar fi $V(x)$ (o vecinătate a lui x), $V(x) \cap E - A \neq \varnothing$ ceea ce arată că A nu este vecinătate pentru x. Rezultă $x \notin \mathring{A}$ și cum $x \in \bar{A}$, $x \in \bar{A} - \mathring{A}$.

Pentru a arăta că $\bar{A} - \mathring{A} \subset \bar{A} \cap (\overline{E - A})$ fie $x \in \bar{A} - \mathring{A}$. Rezultă că $x \in \bar{A}$ și $x \notin \mathring{A}$. Fie $U(x)$ o vecinătate a lui x. Trebuie să arătăm că $U(x) \cap (E - A) \neq \varnothing$.

Să presupunem că $U(x) \cap (E - A) = \varnothing$, rezultă că $U(x) \cup \mathring{A}$ este o mulțime deschisă; $U(x) \cup \mathring{A} \subset A$ și, deoarece $\mathring{A}$ este cea mai mare mulțime deschisă conținută în A, urmează $U(x) \cup \mathring{A} \subset \mathring{A}$ ceea ce nu se poate, deoarece $x \notin \mathring{A}$.

Deci $U(x) \cap (E - A) \neq \varnothing$ și $x \in \bar{A} \cap (\overline{E - A})$.

2) $\mathrm{Fr}(A) = \bar{A} - \mathring{A}$, $\mathrm{Fr}(\bar{A}) = \bar{A} - \overset{\circ}{\bar{A}}$.

Dar, $A \subset \bar{A}$; de aici $\mathring{A} \subset \mathring{\bar{A}}$ sau:

$$-\mathring{\bar{A}} \subset -\mathring{A}, \text{ deci}$$
$$\mathrm{Fr}(\bar{A}) \subset \mathrm{Fr}(A).$$

La fel,

$$\mathrm{Fr}(A) = \bar{A} - \mathring{A}, \quad \mathrm{Fr}(\mathring{A}) = \bar{\bar{A}} - \mathring{A}$$

dar, $\mathring{A} \subset A$ şi, trecînd la închidere, $\bar{\bar{A}} \subset \bar{A}$, prin urmare $\mathrm{Fr}(\mathring{A}) \subset \mathrm{Fr}(A)$.

3) $\mathrm{Fr}(A \cup B) = \overline{A \cup B} - \widehat{A \cup B}$;
dar, $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

$$\mathring{A} \subset A, \quad \mathring{B} \subset B, \quad \text{de unde} \quad \mathring{A} \cup \mathring{B} \subset A \cup B$$

prin urmare

$$\mathring{A} \cup \mathring{B} = \widehat{\mathring{A} \cup \mathring{B}} \subset \widehat{A \cup B}$$

obţinem astfel

$$-(\widehat{A \cup B}) \subset -(\mathring{A} \cup \mathring{B}),$$

rezultă

$$\mathrm{Fr}(A \cup B) \subset \bar{A} \cup \bar{B} - (\mathring{A} \cup \mathring{B}) = \bar{A} - \mathring{A} \cup (\bar{B} - \mathring{B}) = \mathrm{Fr}\, A \cup \mathrm{Fr}\, B.$$

42. Fie $A \subset R$. Să se arate că dacă mulţimea punctelor ei de acumulare A' este numărabilă, atunci A este numărabilă.

R: Să presupunem că $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ sînt elementele mulţimii A' (puncte de acumulare pentru mulţimea A). Să considerăm mulţimea

$$(-\infty, x_1] \cup (x_1, x_2] \cup (x_2, x_3] \cup \ldots \cup (x_n, +\infty)$$

şi şirul de mulţimi

$$A_1 = A \cap (-\infty, x_1], \ldots, A_k = A \cap (x_k, x_{k+1}], \ldots$$

$$A_n = A \cap (x_n, x_{n+1}], \ldots$$

Mulţimea A_1 este o mulţime numărabilă sau finită, deoarece are un singur punct de acumulare, celelalte fiind puncte izolate. În acelaşi mod se arată că toate mulţimile A_k sînt numărabile.
Deoarece

$$A = \bigcup_1^{\infty} A_k$$

urmează că A este numărabilă.

43. Fie A o submulţime de numere reale şi A' mulţimea punctelor ei de acumulare. Să definim prin recurenţă $A^{(n)} = (A^{(n-1)})'$. Să se construiască o mulţime A pentru care $A^{(n-1)} \neq \varnothing$ şi $(A^{(n-1)})' = \varnothing$ pentru un anume n.

R: Să considerăm şirurile:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$$

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \ldots, \frac{n}{2n+1}, \ldots$$

$$\frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{3}{10}, \ldots, \frac{n}{3n+1}, \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{m+1}, \frac{2}{2m+1}, \ldots, \frac{n}{mn+1}, \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$m = 1, 2, \ldots, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Să presupunem mulţimea A formată din elementele tuturor acestor şiruri.

Punctele de acumulare ale acestei mulţimi sînt:

$$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{m}, \ldots \quad m = 1, 2, \ldots$$

Mulţimea $A' = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{m}, \ldots\right\}$.

Punctele de acumulare ale mulţimii A' sînt elementele mulţimii A'', deci

$$A'' = \{0\}.$$

Pentru această mulţime $A''' = \varnothing$. În acest exemplu $n = 3$. Pentru $n = 4$ construim o mulţime A^* care are ca mulţime a punctelor de acumulare pe A, ş.a.m.d.

44. O submulţime S a unei mulţimi bine ordonate X se numeşte *segment* dacă

$$S = \{x \in X,\ x < y\}$$

pentru $y \in X$ arbitrar sau $S = X$.

Să se arate că reuniunea de segmente este de asemenea un segment.

R: Să considerăm o familie S_λ de segmente cu $\lambda \in A$ unde $S_\lambda = \{x, x \in X;\ x < y_\lambda\}$. Avem

$$S = \bigcup_{\lambda \in A} S_\lambda = \{x,\ x \in X,\ x < \max\ y_\lambda\}$$

de unde definiţia că S este un segment.

45. Să se arate că spaţiul R^n cu topologia obişnuită este separabil (Un spaţiu X este separabil dacă X conţine o mulţime A densă şi numărabilă).

R: Vom considera mulțimea

$$A = \{(x_1, \ldots, x_n), \quad x_i \in Q, \quad 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

a elementelor din R^n care au toate coordonatele raționale.

Această mulțime este numărabilă, deoarece Q este o mulțime numărabilă.

A este o mulțime densă, deoarece $\bar{A} = R^n$.

Într-adevăr, un șir de puncte din A are ca limită un punct din R^n (fie cu toate coordonate raționale, fie nu).

46. Să definim distanța de la punctul x la mulțimea A prin $\rho(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y)$.

Să se arate că pentru o mulțime închisă A, relațiile:

$$\rho(x, A) = 0 \text{ și } x \in A$$

sînt echivalente, dar nu sînt echivalente pentru o mulțime care nu este închisă.

R: Din definiție $\rho(x, A) = 0$ înseamnă $\inf_{y \in A} \rho(x, y) = 0$.

Dacă marginea inferioară a mulțimii A aparține mulțimii, atunci $x \in A$. Dacă mulțimea nu este închisă, acest lucru nu este în general adevărat.

Să considerăm exemplul următor:

$$A = [2, 3] \text{ și } x = 2;$$

$\rho(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(2, y) = 0$ pentru $y = 2$; În acest caz $2 \in A$;.

Dacă $a = (2, 3]$ și $x = 2$;

$$\rho(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(2, y) = 0 \qquad \text{dar: } 2 \notin A.$$

47. În condițiile de la exercițiul precedent, dacă $A \subset X$ și $x, y \in X$, atunci:

$$|\rho(x, A) - \rho(y, A)| \leqslant \rho(x, y).$$

R: Din definiție

$$\rho(x, A) = \inf_{z \in A} \rho(x, z); \quad \rho(y, A) = \inf_{z \in A} \rho(y, z).$$

Ținînd seama de proprietățile distanței, vom scrie:

$$\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z), \quad x, y, z \in X.$$

$$\rho(y, z) \leqslant \rho(y, x) + \rho(x, z).$$

Luînd în aceste inegalități marginea inferioară în raport cu z, obținem

$$\rho(x, A) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, A)$$

$$\rho(y, A) \leqslant \rho(x, y) + \rho(x, A), \text{ deoarece } \rho(x, y) = \rho(y, x),$$

de unde

$$-\rho(x, y) \leqslant \rho(x, A) - \rho(y, A) \leqslant \rho(x, y)$$

ceea ce demonstrează rezultatul cerut.

Rezultă că funcţia f definită pe X prin $f(x) = \rho(x, A)$ este continuă pe X.

48. *Fie A mulţimea tuturor şirurilor ce au ca elemente pe 0 şi 1. Să se arate că mulţimea A nu este numărabilă.*

R: Demonstrăm prin reducere la absurd. Presupunem că A este numărabilă şi deci elementele ei se scriu în şirul $x_1, x_2, ..., x_n, ...$

Vom construi şirul x astfel: dacă elementul de rang k în şirul x_n este 1 (sau 0), atunci cifra de rang k este 0 (sau 1). Şirul x astfel construit diferă de oricare din şirurile $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ şi este un şir format din 0 şi 1, deci aparţine mulţimii A.

Vom arăta, mai mult, că mulţimea este de puterea continuului.

Fie B mulţimea şirurilor din A în care de la un rang dat toate elementele sînt 1.

Asociem fiecărui şir din B numărul cu dezvoltarea diadică $0, a_1 a_2 a_3 ...$ Acest număr va fi 1 sau $\frac{m}{2^n}$ $(m = 1, 3, ..., 2^n - 1)$.

Mulţimea B este numărabilă, dat fiind corespondenţa între mulţimea B şi aceste numere.

Dacă unui şir $(y_1, y_2, ..., y_n, ...)$ din $A - B$ îi facem să-i corespundă numărul cu dezvoltarea diadică $0, a_1 a_2 a_3 ...$ obţinem o corespondenţă biunivocă între $A - B$ şi $[0, 1)$, de unde rezultă că $A - B$ este de puterea continuului.

Consecinţă. Mulţimea şirurilor monotone de numere reale

$$(S) \qquad (a_1, a_2, ..., a_n, ...) \quad a_n \in R$$

este de puterea continuului.

Este suficient să asociem fiecărui şir numărul $0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 ... \alpha_n ...$ cu $\alpha_i = 0$, dacă $a_i = 0$ şi $\alpha_i = 1$, dacă $a_i \neq 0$. Mulţimea aceasta este o submulţime a mulţimii şirurilor considerate.

Cum mulţimea din exerciţiul de mai sus este de puterea continuului, rezultă că şi mulţimea şirurilor (S) este de puterea continuului.

49. *Mulţimea lui Cantor.* Să îndepărtăm un interval deschis $I_{1,1}$ de lungime < 1 din centrul lui $[0, 1]$. Aceasta conduce la două intervale închise disjuncte două cîte două $J_{1,1}$ şi $J_{1,2}$ avînd fiecare lungimea $< \frac{1}{2}$. Continuăm în acelaşi mod de n ori. La a „n"-a operaţie obţinem 2^n intervale închise disjuncte $J_{n,1}; J_{n,2}; ... J_{n,2^n}$; fiecare de lungime $< \frac{1}{2^n}$. La operaţia a „$n+1$"-a se exclude un interval deschis $I_{n+1,k}$ din centrul lui $J_{n,k}$ astfel că lungimea lui $I_{n+1,k}$ este mai mică decît lungimea lui $J_{n,k} (1 \leqslant k \leqslant 2^n)$. Se obţin astfel 2^{n+1} intervale închise $J_{n+1,1}; ...; J_{n+1,2^{n+1}}$ fiecare de lungime $< \frac{1}{2^{n+1}}$.

Fie

$$V_n = \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_{n,k} \quad \text{şi} \quad P_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} J_{n,k}, \qquad n \in N$$

$$\text{şi } P = \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n = [0, 1] \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n \right).$$

Orice mulțime P construită în acest mod este o mulțime de tip Cantor.

În cazul în care $I_{1,1} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ și lungimea lui $I_{n+1,k}$ este $\frac{1}{3}$ din lungimea lui $J_{n,k}$ (k, $n \in N$, $1 \leqslant k \leqslant 2^n$) mulțimea P rezultată este mulțimea lui Cantor. În acest caz

$$J_{1,1} = \left[0, \frac{1}{3}\right], \quad J_{1,2} = \left[\frac{2}{3}, 1\right], \quad I_{2,1} = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$$

$$I_{2,2} = \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right), \quad J_{2,1} = \left[0, \frac{1}{9}\right] \text{ etc.}$$

50. Mulțimea lui Cantor este de puterea continuului.

R: Orice număr $x \in [0, 1]$ se scrie în baza 3 sub forma $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}$, unde $x_n = 0, 1, 2$.

Această expresie este unică exceptînd cazul în care $x = \frac{a}{3^m}$, $a, m \in N$ unde $0 < a < 3^m$ și 3 nu divide pe a. În acest caz x are o expresie finită de forma $x = \frac{x_1}{3} + \cdots + \frac{x_m}{3^m}$, unde $x_m = 1$ (dacă $a \equiv 1 \pmod 3$) sau $x_m = 2$ (dacă $a \equiv 2 \pmod 3$).

Prin inducție se arată că:

$$P_n = \{x; \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad x_n \in \{0, 1, 2\}\}.$$

De exemplu $P_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$,

$$P_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

$\left(\text{scriem } \frac{1}{3} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{3^n}\right)$. Astfel $x \in P = \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n$ dacă și numai dacă $x_n \in \{0, 1, 2\}$, $(\forall)$ $n \in N$.

Aplicația $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \to (x_n)$ este o corespondență biunivocă între P și $\{0, 1, 2\}$ (deci P este de puterea continuului).

Dăm acum o altă proprietate a mulțimii lui Cantor.

Exemplu de mulțime în R care nu conține niciun interval.

Fie $E_0 = [0, 1]$. Să îndepărtăm din această mulțime intervalul $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ și fie

$$E_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Îndepărtăm din fiecare din aceste segmente a treia parte situată la mijloc și fie

$$E_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Procedînd astfel, obţinem şirul de mulţimi compacte E_n, astfel ca:

$$E_1 \supset E_2 \supset \ldots \supset E_n \supset \ldots$$

E_n este reuniunea a 2^n segmente, pentru care lungimea fiecăruia este $\frac{1}{3^n}$.

Mulţimea $P = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ este tot o mulţime a lui Cantor; este o mulţime compactă care nu conţine nici un interval.

Nu există nici un m, $k \in N$, astfel ca

$$\left(\frac{3k+1}{3^m}, \frac{3k+2}{3^m}\right) \cap P \neq \varnothing.$$

Pentru a arăta că mulţimea P este perfectă este suficient să arătăm că P nu conţine puncte izolate.

Fie $x \in P$ şi S un interval oarecare ce conţine pe x. Alegem pe n suficient de mare astfel ca $I_n \subset S$. Fie x_n din I_n astfel ca $x_n \neq x$. Dar, $x_n \in P$. Înseamnă că x este punct limită al mulţimii P; mulţimea P este perfectă.

51. Să se arate că R^n devine un spaţiu metric în raport cu distanţa:

$$\rho^*(x, y) = |x_1 - y_1| + \ldots + |x_n - y_n|, \; x = (x_1, \ldots, x_n), \; y = (y_1, \ldots, y_n)$$

sau cu distanţa

$$\rho^+(x, y) = \max \{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\}.$$

Pentru $n = 2$, $n = 3$ să se reprezinte mulţimile

$$A = \{x, \rho(x, y) < 1\}, \quad B = \{x, \rho^*(x, y) < 1\}, \quad C = \{x; \; \rho^+(x, y) < 1\}.$$

R: Trebuie să verificăm că sînt îndeplinite axiomele normei

1) $\rho^*(x, y) \geqslant 0, \quad \rho^*(x, y) = 0 \to x_i = y_i$

2) $\rho^*(x, y) = \rho^*(y, x)$ deoarece $|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$

3) $\rho^*(x, y) \leqslant \rho^*(x, z) + \rho^*(z, y)$

deoarece $|x_i - y_i| \leqslant |x_i - z_i| + |z_i - y_i|$.

La fel

1') $\rho^+(x, y) \geqslant 0$ deoarece $|x_i - y_i| \geqslant 0 \; (\forall) \; i = 1 \ldots, n$

2') $\rho^+(x, y) = \rho^+(y, x)$ deoarece maximul rămîne acelaşi

3') $\rho^+(x, y) \leqslant \rho^+(x, z) + \rho^+(z, y)$ deoarece

dacă $|x_i - z_i| = \max \{|x_1 - z_1|, \ldots, |x_n - z_n|\} \geqslant |x_k - z_k|$

$|z_j - y_j| = \max \{|z_1 - y_1|, \ldots, |z_n - y_n|\} \geqslant |z_k - y_k|$

şi $|x_h - y_k| = \max \{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\}$

atunci

$$|x_k - y_k| \leqslant |x_h - z_k| + |z_k - y_k| \leqslant |x_i - z_i| + |z_j - y_j|.$$

Pentru $n = 2$

$\rho^*(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$

reprezintă semiperimetrul dreptunghiului ce are vîrfurile $A(x_1, x_2)$ și $B(y_1, y_2)$ (fig. 3) iar

$$\rho^+(x, y) = \max \{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

reprezintă lungimea laturei celei mai mari.

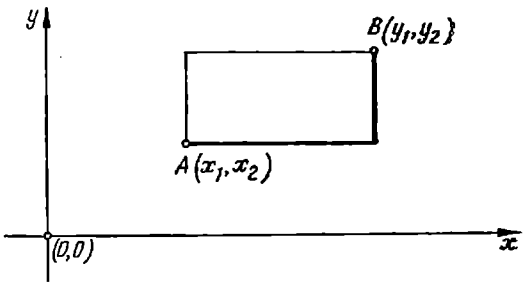

Fig. 3.

Pentru $n = 3$, $\rho^*(x, y)$ reprezintă suma muchiilor paralelipipedului construit pe vectorii de lungime $|x_1 - y_1|$, $|x_2 - y_2|$, $|x_3 - y_3|$ iar ρ^* reprezintă lungimea muchiei celei mai mari.

Mulțimile A, B, C sînt reprezentate în figura 3.

52. Fie $D = \{z \in C : |z| \leqslant 1\}$ discul de rază unitate în planul complex. Să se arate că

$$d(z, w) = \begin{cases} |z - w| & \text{dacă } \arg z = \arg w \\ & \text{sau unul dintre } z \text{ și } w \text{ este } 0 \\ |z| + |w| & \text{în celelalte cazuri} \end{cases}$$

este o metrică în mulțimea D.

R: a) $d(z, w) \geqslant 0$, $d(z, w) = 0$, dacă $|z - w| = 0$ sau $z - w = 0$;

dacă $|z| + |w| = 0$, atunci $|z| = 0$ și $|w| = 0$.

Cum $z = |z| e^{i\theta_1}$, $w = |w| e^{i\theta_2}$, urmează $z = w = 0$.

b) $d(z, w) = d(w, z)$, deoarece

$$|z - w| = |w - z| \text{ și } |z| + |w| = |w| + |z|$$

c) dacă z, v și w sînt numere complexe ce au același argument,

$$|z - w| \leqslant |z - v| + |v - w|.$$

Putem scrie $z = r_1 e^{i\theta}$, $v = r_2 e^{i\theta}$, $w = r_3 e^{i\theta}$, și de aici:

$$|z - w| = |r_1 - r_3|, \quad |v - w| = |r_2 - r_3|, \quad |z - v| = |r_1 - r_2|$$

avem însă

$$|r_1 - r_3| \leqslant |r_1 - r_2| + |r_2 - r_3|$$

de unde rezultă c); dacă arg z $\neq$ arg v $\neq$ arg w

$$|z| + |w| \leqslant |z| + |v| + |v| + |w|$$

ceea ce este evident.

53. Se consideră mulțimea $\mathcal{S}$ a șirurilor $x \in \mathcal{S}$ cu

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...), \quad x_i \in R.$$

Să se arate că

$$\rho(x, y) = \sum_1^\infty \frac{|x_p - y_p|}{1 + |x_p - y_p|} \frac{1}{2^p}$$

definește o metrică pe $\mathcal{S}$.

R: Avem $\rho(x, y) < \infty$ pentru orice $x, y \in \mathcal{S}$, deoarece

$$\rho(x, y) = \sum_1^\infty \frac{|x_p - y_p|}{1 + |x_p - y_p|} \cdot \frac{1}{2^p} \leqslant \sum_1^\infty \frac{1}{2^p} = 1.$$

Funcția $\rho(x, y)$ este simetrică, deoarece $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.

Avem și $\rho(x, x) = 0$. Rămîne să mai arătăm că

$$(\alpha) \qquad \rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(y, z)$$

sau

$$\sum_1^\infty \frac{|x_p - y_p|}{1 + |x_p - y_p|} \frac{1}{2^p} \leqslant \sum_1^\infty \left[\frac{|x_p - z_p|}{1 + |x_p - z_p|} + \frac{|y_p - z_p|}{1 + |y_p - z_p|} \right] \frac{1}{2^p}$$

se vede imediat că este suficient să arătăm că

$$(\beta) \qquad \frac{|x_p - y_p|}{1 + |x_p - y_p|} \leqslant \frac{|x_p - z_p|}{1 + |x_p - z_p|} + \frac{|y_p - z_p|}{1 + |y_p - z_p|}.$$

Este necesar deci să dovedim că în general

$$(\gamma) \qquad \frac{|a + b|}{1 + |a + b|} \leqslant \frac{|a|}{1 + |a|} + \frac{|b|}{1 + |b|}$$

deoarece, dacă punem $x_p - y_p = (x_p - z_p) + (z_p - y_p)$ sîntem conduși la această neegalitate. Pentru $a > 0$, $b > 0$, avem

$$\frac{|a + b|}{1 + |a + b|} = \frac{a + b}{1 + a + b} = \frac{a}{1 + a + b} + \frac{b}{1 + a + b} < \frac{a}{1 + a} + \frac{b}{1 + b} =$$

$$= \frac{|a|}{1 + |a|} + \frac{|b|}{1 + |b|}$$

și neegalitatea (γ) este adevărată. Dacă $a \cdot b < 0$, pentru $|a| > |b|$ putem scrie $|a + b| < |a|$; deoarece

$$\frac{|a|}{1 + |a|} - \frac{|b|}{1 + |b|} = \frac{|a| - |b|}{(1 + |a|)(1 + |b|)} > 0$$

rezultă și în acest caz

$$\frac{|a + b|}{1 + |a + b|} \leqslant \frac{|a|}{1 + |a|} \leqslant \frac{|a|}{1 + |a|} + \frac{|b|}{1 + |b|}.$$

Neegalitatea (β) este adevărată, de unde rezultă (α). Mulțimea $\mathcal{S}$ cu metrica astfel definită se numește spațiul s.

54. Fie $C = C[0,1]$ spațiul tuturor funcțiilor continue pe $[0,1]$ și să definim $\|f\| = \max |f(x)|$. Să se arate că C este un spațiul Banach.

R: Pentru a arăta că spațiul C este un spațiu Banach, trebuie să arătăm că este normat în raport cu norma f și că este *complet.*

Funcția $\|f\| = \max |f(x)|$ verifică condițiile normei

$$(\forall)\quad f\in C[0,1];\ \max_{x\in[0,1]} |f(x)| = 0 \to f(x) = 0,\quad (\forall)\quad x\in[0,1]$$

$$\max_{x\in[0,1]} |f(x) + g(x)| \leqslant \max_{x\in[0,1]} |f(x)| + \max_{x\in[0,1]} |g(x)|,$$

$$\max_{x\in[0,1]} |\alpha f| = |\alpha| \max_{x\in[0,1]} |f|.$$

Pentru a dovedi că un spațiu este complet, trebuie să arătăm că orice șir *Cauchy* este un șir convergent.

Fie $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ un șir de funcții continue pe $[0,1]$, șir care este Cauchy. Aceasta înseamnă că

$$\lim_{\substack{p\to\infty\\ n\to\infty}} \|f_p - f_n\| = 0$$

sau

$$\lim_{\substack{p\to\infty\\ n\to\infty}} (\max_{x\in[0,1]} |f_p(x) - f_n(x)|) = 0.$$

De aici rezultă că pentru x fixat:

$$\lim_{\substack{p\to\infty\\ n\to\infty}} |f_p(x) - f_n(x)| = 0,$$

deci am obținut pentru x fix un șir Cauchy în spațiul R. Dar R este complet. Există deci o limită pe care o notăm $f(x)$. Aplicația $x \to f(x)$, $x\in[0,1]$ definește o funcție.

Trebuie arătat că $f\in C$ și că $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$. Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar și N un număr natural astfel ca pentru $m, n \geqslant N$

$$\|f_n - f_m\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Fie $x\in[0,1]$ fixat și alegem m (depinzînd de x și ε) astfel ca $m \geqslant N$ și

$$|f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Dar

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \frac{2\varepsilon}{3},$$

pentru $n \geqslant N$. N nu depinde de x și luînd marginea superioară în inegalitatea de mai sus, obținem:

$$\| f_n - f \| = \sup_{x \in [0,1]} | f_n(x) - f(x) | \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Pentru a arăta că f este continuă, fie $x \in [0,1]$ arbitrar, $\varepsilon > 0$ arbitrar și n astfel ca $\| f_n - f \| < \frac{\varepsilon}{3}$. Fie U o vecinătate a lui x astfel ca:

$$| f_n(y) - f_n(x) | < \frac{\varepsilon}{3}, \quad (\forall) \quad y \in U.$$

Pentru $y \in U$, urmează

$$| f(y) - f(x) | \leqslant | f(y) - f_n(y) | + | f_n(y) - f_n(x) | + | f_n(x) - f(x) | \leqslant$$

$$\leqslant 2 \| f - f_n \| + | f_n(y) - f_n(x) | \leqslant \frac{3\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

ȘIRURI ȘI SERII NUMERICE

1. Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) = \ln a, \quad a > 0.$$

R: Notăm $\sqrt[n]{a} - 1 = b_n$ unde b_n tinde la zero cînd n tinde la infinit. De aici rezultă

$$\sqrt[n]{a} = 1 + b_n$$

$$\frac{1}{n} \ln a = \ln (1 + b_n)$$

și

$$n = \frac{\ln a}{\ln (1 + b_n)}$$

Limita dată se scrie

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) = \lim_{b_n\to 0} \frac{\ln a}{\ln (1 + b_n)} b_n = \lim_{b_n\to 0} \frac{\ln a}{\ln (1 + b_n)^{1/b_n}} = \ln a.$$

2. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a_1} + \sqrt[n]{a_2} + \ldots + \sqrt[n]{a_m}}{m} \right)^n ; \; a_1 > 0, \; a_2 > 0, \ldots, a_m > 0.$$

R: Deoarece trecînd la limită obținem o nedeterminare de forma 1^∞ căutăm să reducem calculul limitei la numărul e; **obținem:**

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a_1} + \sqrt[n]{a_2} + \ldots + \sqrt[n]{a_m}}{m} \right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\sqrt[n]{a_1} + \sqrt[n]{a_2} + \ldots + \sqrt[n]{a_m} - m}{m} \right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{n}{m}\left(\sqrt[n]{a_1} + \sqrt[n]{a_2} + \ldots + \sqrt[n]{a_m} - m\right)} = e^{\frac{1}{m} \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a_1} - 1 + \sqrt[n]{a_2} - 1 + \ldots + \sqrt[n]{a_m} - 1\right)} =$$

$$= e^{\frac{1}{m}(\ln a_1 + \ln a_2 + \ldots + \ln a_m)} = e^{\ln \sqrt[m]{a_1 a_2 \ldots a_m}} = \sqrt[m]{a_1 a_2 \ldots a_m}.$$

3. Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 3^p + 5^p + \ldots + (2n-1)^p}{n^{p+1}} = \frac{2^p}{p+1}.$$

R: Aplicăm lema lui O. Stolz pentru şirurile de termen general

$$u_n = 1^p + 3^p + 5^p + \ldots + (2n-1)^p \text{ şi } v_n = n^{p+1}.$$

Obţinem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^p}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^p}{(p+1)n^p + C_{p+1}^2 n^{p-1} + \ldots + 1} = \frac{2^p}{p+1}.$$

4. Se consideră şirul numeric de termen general definit de relaţia de recurenţă

$$u_n = \frac{1}{2}\left(u_{n-1} + \frac{a}{u_{n-1}}\right)$$

unde $a > 0$ este un număr dat iar u_0 este un număr pozitiv arbitrar. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} u_n$.

R: Şirul este convergent, deoarece este monoton şi mărginit.

Din relaţia de recurenţă rezultă (deoarece a şi u_0 sînt pozitivi) $u_1 > 0$, $u_2 > 0, \ldots, u_n > 0, \ldots$; de asemenea $u_{n-1}^2 - 2u_n u_{n-1} + a = 0$ trebuie să aibă rădăcini reale, urmează $u_n^2 - a > 0$. Avem şi

$$u_n - u_{n-1} = \frac{1}{2}\left(u_{n-1} + \frac{a}{u_{n-1}}\right) - u_{n-1} = \frac{1}{2u_{n-1}}(a - u_{n-1}^2) < 0$$

deci, şirul este monoton descrescător mărginit inferior. Este convergent şi dacă notăm cu l limita sa

$$l = \frac{1}{2}\left(l + \frac{a}{l}\right), \text{ de unde } l_2 = a,\ l = \sqrt{a}.$$

5. Să se arate că pentru orice şir $(a_n)_{n\in N}$ convergent, şirul $(u_n)_{n\in N}$, unde $u_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ este convergent către aceeaşi limită. Să se dea exemplu de un şir $(a_n)_{n\in N}$ divergent, pentru care şirul $(u_n)_{n\in N}$ este convergent.

R: Ştim că $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Aplicăm lema lui O. Stolz şi obţinem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(a_1 + \ldots + a_{n+1}) - (a_1 + \ldots + a_n)}{(n+1) - n} = a.$$

Să considerăm şirul (a_n) cu $a_n = (-1)^n$; acesta este un şir oscilant, deci care nu este convergent.

Şirul cu termenul general $u_n = \frac{1 - 1 + \ldots + (-1)^n}{n}$ este de fapt şirul $1, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{2p+1}, 0, \ldots$ care este convergent către 0.

Spunem în acest caz că şirul cu termenul general $a_n = (-1)^n$ este sumabil Cesaro (C, 1).

6. Să se demonstreze că, dacă $a_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, dacă aceasta din urmă există. Aplicaţie:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}.$$

R: Să notăm $\sqrt[n]{a_n} = b_n$ şi $\ln b_n = \frac{1}{n} \ln a_n$.

Aplicăm lema lui O. Stolz şirurilor de termen general

$$u_n = \ln a_n \quad \text{şi} \quad v_n = n;$$

astfel:

$$\lim_{n\to\infty} \ln b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n} = \lim_{n\to\infty} \ln \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

de unde rezultă:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Aplicaţie: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\, n^n}{(n+1)^{n+1} n!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}.$$

7. Fie

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

un şir de numere reale şi

$$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

un şir de numere reale, strict crescător, nemărginit, astfel că următoarele şiruri

(S_1) cu termenul general $s_{n,1}(b) = b_{n+1} - b_n$,

(S_2) cu termenul general $s_{n,2}(b) = b_{n+2} - 2b_{n+1} + b_n$,

.....

(S_{m-1}) cu termenul general

$$s_{n,m-1} = b_{n+m-1} - C^1_{m-1} b_{n+m-2} + C^2_{m-1} b_{n+m-3} - \ldots + (-1)^m C^{m-1}_{m-1} b_n$$

să fie strict crescătoare, nemărginite. Să se arate că dacă

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+m} - C_m^1 a_{m+n-1} + \ldots + (-1)^m C_m^m a_n}{b_{n+m} - C_m^1 b_{m+n-1} + \ldots + (-1)^m C_m^m b_n} = l \text{ (finit sau infinit)}$$

atunci și

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_{n,k}(a)}{s_{n,k}(b)} = l, \quad k = 0,1, \ldots, m-1$$

și, în particular, și

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l.$$

R: Folosim lema lui O. Stolz. Dacă șirul $S_{m-1}(b)$ este strict crescător, nemărginit putem aplica lema lui O. Stolz șirurilor

$$S_{m-1}(a) \text{ și } S_{m-1}(b); \text{ avem}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_{n+1,m-1}(a) - s_{n,m-1}(a)}{s_{n+1,m-1}(b) - s_{n,m-1}(b)} = \lim_{n\to\infty} \frac{s_{n,m}(a)}{s_{n,m}(b)} = l,$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_{n,m-1}(a)}{s_{n,m-1}(b)} = l.$$

În continuare, șirul $S_{m-2}(b)$, fiind strict crescător, nemărginit aplicînd lema lui O. Stolz șirurilor lui $S_{m-2}(a)$ și $S_{m-2}(b)$, obținem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_{n+1,m-2}(a) - s_{n,m-2}(a)}{s_{n+1,m-2}(b) - s_{n,m-2}(b)} = \lim_{n\to\infty} \frac{s_{n,m-1}(b)}{s_{n,m-1}(b)} = l,$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_{n,m-2}(b)}{s_{n,m-2}(b)} = l.$$

Procedînd în același mod, rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_{n,k}(a)}{s_{n,k}(b)} = l,$$

pentru $k = 1, 2, \ldots, m-1$. Pentru $k = 1$, mai aplicăm o dată lema lui O. Stolz; obținem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_{n+1,0}(a) - s_{n,0}(a)}{s_{n+1,0}(b) - s_{n,0}(b)} = \lim_{n\to\infty} \frac{s_{n,1}(a)}{s_{n,1}(b)} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l.$$

8. Se dă şirul cu termen general

$$u_n = \frac{\frac{n}{1}\ln 2 + \frac{n-1}{2}\ln 3 + \ldots + \frac{1}{n}\ln(n+1)}{n\ln 2 + (n-1)\ln 3 + \ldots + 1\cdot\ln(n+1)}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Să se arate că este convergent şi are limita zero.

R: Dacă punem

$$v_n = \frac{n}{1}\ln 2 + \frac{n-1}{2}\ln 3 + \ldots + \frac{1}{n}\ln(n+1),$$

$$w_n = n\ln 2 + (n-1)\ln 3 + \ldots + 1\cdot\ln(n+1),$$

avem

$$v_{n+2} - 2v_{n+1} + v_n = \frac{1}{n+2}\ln(n+3),$$

$$w_{n+2} - 2w_{n+1} + w_n = \ln(n+2),$$

deoarece,

$$v_{n+1} - v_n = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln 3 + \ldots + \frac{1}{n}\ln(n+1) + \frac{1}{n+1}\ln(n+2)$$

$$w_{n+1} - w_n = \ln 2 + \ln 3 + \ldots + \ln n + \ln(n+1),$$

şi satisfac condiţiile din problema precedentă; avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_{n+2} - 2v_{n+1} + v_n}{w_{n+2} - 2w_{n+1} + w_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2}\,\frac{\ln(n+3)}{\ln(n+2)} = 0$$

prin urmare, şirul $(u_n)_{n\in N}$ este convergent şi are limita zero.

9. Fie u_0 şi v_0 $(u_0 < v_0)$ două numere reale. Se construiesc şirurile de termen general u_n şi v_n astfel:

$$u_1 = \frac{u_0 + v_0}{2}, \quad v_1 = \frac{u_0 + 2v_0}{3}$$

$$u_2 = \frac{u_1 + v_1}{2}, \quad v_2 = \frac{u_1 + 2v_1}{3}.$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$u_n = \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2}, \quad v_n = \frac{u_{n-1} + 2v_{n-1}}{3}$$

Să se arate că cele două şiruri sînt convergente către aceeaşi limită cuprinsă între u_0 şi v_0.

R: Observăm că $v_1 - u_1 = \frac{v_0 - u_0}{6} > 0$, deci $v_1 > u_1$.

Demonstrăm prin recurenţă că $v_n > u_n$, pentru orice $n \in N$.

Presupunem că $v_{n-1} - u_{n-1} < 0$ și, deoarece $v_n - u_n = \frac{v_{n-1} - u_{n-1}}{6}$, rezultă $v_n > u_n$.

Pe de altă parte

$$v_n - v_{n-1} = \frac{u_{n-1} + 2v_{n-1}}{3} - v_{n-1} = \frac{u_{n-1} - v_{n-1}}{3} < 0$$

deci șirul (v_n) este un șir monoton descrescător. La fel

$$u_n - u_{n-1} = \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2} - u_{n-1} = \frac{v_{n-1} - u_{n-1}}{2} > 0$$

ceea ce arată că șirul (u_n) este un șir monoton crescător.

Au loc inegalitățile

$$u_0 < u_1 < \ldots < u_n < \ldots < v_n < \ldots < v_2 < v_1 < v_0.$$

Din acest șir de inegalități, rezultă că ambele șiruri sînt monotone și mărginite, deci au limită.

Notăm

$$u = \lim_{n\to\infty} u_n \text{ și } v = \lim_{n\to\infty} v_n$$

și trecem la limită în relația

$$u_n = \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2}.$$

Obținem

$$2u = u + v, \text{ deci } u = v.$$

Din șirul de inegalități stabilit, rezultă că

$$u_0 < \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n < v_0$$

10. Fie $(a_n)_{n\in N}$ un șir de numere reale pozitive. Să se arate că:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n\left(\frac{1 + a_{n+1}}{a_n} - 1\right) \geqslant 1.$$

R: Să presupunem că nu este adevărată această afirmație și că există N astfel încît pentru $n > N$

$$n\left(\frac{1 + a_{n+1}}{a_n} - 1\right) < 1.$$

Această inegalitate este echivalentă cu:

$$\frac{1}{n+1} < \frac{a_n}{n} - \frac{a_{n+1}}{n+1},$$

de unde obținem

$$\frac{1}{N+1} < \frac{a_N}{N} - \frac{a_{N+1}}{N+1}$$

$$\frac{1}{N+2} < \frac{a_{N+1}}{N+1} - \frac{a_{N+2}}{N+2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{N+p} < \frac{a_{N+p-1}}{N+p-1} - \frac{a_{N+p}}{N+p}$$

sau

$$\frac{1}{N+1} < \frac{1}{N+2} + \cdots + \frac{1}{N+p} < \frac{a_N}{N} - \frac{a_{N+p}}{N+p} < \frac{a_N}{N}$$

ceea ce contrazice faptul că seria

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

este divergentă.

11. Să se determine limita superioară și limita inferioară a șirului de mulțimi de numere reale:
$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ unde A_n este mulțimea de întregi mod. n.

R: $A_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, deci $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ și $\lim\limits_{n\to\infty} \sup A_n = \lim\limits_{n\to\infty} \inf A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

12. Fie $(a_n)_{n\in N}$ un șir de numere reale nenegative, astfel ca: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$ să existe și să fie finită și $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 0$. Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n^2} = 0.$$

R: Fie $(a_{n_k})_{k\in N}$ un subșir al lui $(a_n)_{n\in N}$ construit astfel: fie n_1 cel mai mic întreg pentru care $a_{n_1} > a_1$, etc. n_k cel mai mic întreg mai mare decît n_{k-1} pentru care $a_{n_k} > a_{n_{k-1}}$. Pentru $n_k \leqslant n < n_{k+1}$, găsim:

$$0 \leqslant \frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n^2} < \left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\right) \frac{a_{n_k}}{n_k}.$$

Dacă $\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$ este mărginită, deoarece

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{n_k}}{n_k} = 0,$$

rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n^2} = 0.$$

13. Se dă un şir $(x_n)_{n\in N}$ astfel încît

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - x_{n-2}) = 0.$$

Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n + x_{n-1}}{n} = 0.$$

R: Deoarece $\lim_{n\to\infty}(x_n - x_{n-2}) = 0$, rezultă că oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $N(\varepsilon)$ astfel încît pentru orice $n > N$,

$$-\varepsilon < x_n - x_{n-2} < \varepsilon.$$

Scriem

$$x_n - x_N = (x_n - x_{n-2}) - (x_{n-1} - x_{n-2}) + (x_{n-1} - x_{n-3}) -$$
$$- (x_{n-2} - x_{n-3}) + \ldots + (x_{N+1} - x_{N-1}) - (x_N - x_{N-1}).$$

Pentru $n > N(\varepsilon)$, $-\varepsilon < x_n - x_{n-2} < \varepsilon$, deci

$$-\varepsilon(n - N) + x_{N-1} - x_{n-1} < x_n - x_N < (n - N)\varepsilon + x_{N-1} - x_{n-1}$$

de unde

$$-\varepsilon(n - N) < x_n + x_{n-1} - (x_N + x_{N-1}) < (n - N)\varepsilon.$$

Împărţind la n,

$$-\frac{n - N}{n}\varepsilon < \frac{x_n + x_{n-1}}{n} - \frac{x_N + x_{N-1}}{n} < \frac{n - N}{n}\varepsilon.$$

Deoarece N este fix, cînd $n \to \infty$, $\frac{x_N + x_{N-1}}{n} \to 0$ deci $(\exists)\, N_1(\varepsilon)$, astfel ca

$$-\varepsilon < \frac{x_N + x_{N-1}}{n} < \varepsilon$$

de unde rezultă că pentru $n > \max\{N(\varepsilon), N_1(\varepsilon)\}$

$$-2\varepsilon < \frac{x_n + x_{n-1}}{n} < 2\varepsilon.$$

Exemplu: Şirul $x_n = 1 + \frac{1}{n}$ îndeplineşte condiţia din enunţ deoarece

$$x_n - x_{n-2} = 1 + \frac{1}{n} - 1 - \frac{1}{n-2} = -\frac{2}{n(n-2)} \to 0$$

urmează ca

$$\frac{x_n + x_{n-1}}{n} = \frac{2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}}{n} \to 0.$$

14. Să se arate că şirul $(u_n)_{n\in N}$ unde

$$u_n = \frac{f(n+1)}{f(n)}, \quad f(n) = (n!)^{\frac{1}{n}}$$

este monoton descrescător.

R: Să considerăm raportul

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{f(n+2)\cdot f(n)}{f^2(n+1)} = \frac{[(n+2)!]^{\frac{1}{n+2}}\,[n!]^{\frac{1}{n}}}{[(n+1)!]^{\frac{2}{n+1}}}$$

Ridicînd la puterea $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$, obţinem

$$\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} = (n!)^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{(n+1)^{\frac{n+3}{2}}} \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}} < (n!)^{\frac{1}{n}} \frac{1}{n+1} \cdot \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}}.$$

Deoarece media geometrică este mai mică decît media aritmetică

$$(n!)^{\frac{1}{n}} < \frac{1+2+\ldots+n}{n} = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}$$

$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ este un şir monoton crescător care tinde la numărul e, deci

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < e,$$

înlocuim şi obţinem

$$\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} < \frac{1}{2}\sqrt{e} < 1$$

ceea ce trebuia demonstrat.

15. Să se arate că şirul de termen general

$$a_n = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$$

este monoton şi mărginit.

R: Avem $a_{n+1} = a_n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right) > a_n$, deci şirul este monoton crescător. Marginea inferioară $m = \frac{3}{2}$.

Trebuie arătat că a_n este mărginit superior; observăm că

$$a_1 = 1 + \frac{1}{2}\ ;\ a_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}\right)$$

$$a_3 = \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}\right) + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6}\right)$$

.....

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{1+2+\ldots+n+1}}\right).$$

Pe a_n îl putem pune sub forma:

$$a_n = \frac{1 - \frac{1}{2^2}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^4}}{1 - \frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{\frac{n(n+1)}{2}+1}}}{1 - \frac{1}{2}} =$$

$$= 2\left[1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^{\frac{n(n+1)}{2}+1}}\right)\right] <$$

$$< 2\left(1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) = 2\left(1 + \frac{\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}}\right) =$$

$$= 2\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}\right) < 2 + 1 = 3$$

şirul este şi mărginit superior, deci este convergent.

16. Să se arate că şirul de termen general

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

este monoton descrescător şi mărginit inferior. Să i se calculeze limita.

R: Aplicăm inegalitatea lui Bernoulli

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$$

pentru $x = \frac{1}{n^2 - 1}$.

Obţinem

$$\left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right)^n \geqslant 1 + \frac{n}{n^2 - 1} > 1 + \frac{1}{n}$$

sau încă

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \geqslant \frac{n+1}{n}$$

care se mai scrie

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^n \geqslant \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

sau

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n \geqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

ceea ce înseamnă că $u_n \geqslant u_{n+1}$; şirul este monoton descrescător şi mărginit inferior de 0 fiind un şir cu termeni pozitivi, rezultă că şirul este convergent.

Pentru calculul limitei avem:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e.$$

17. Se dă

1) $$x_{m,n} = \frac{(-1)^{n+m}}{n+m} + \frac{1+(-1)^{n+m}}{2}.$$

Să se calculeze limitele iterate ale şirului dublu.

R. Elementele acestui şir sînt elementele din tabloul

$$\frac{1}{2}+1, \quad -\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}+1, \quad =\frac{1}{5}, \ldots$$

$$-\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}+1, \quad -\frac{1}{5}, \quad \frac{1}{6}+1, \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}+\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\left(\frac{(-1)^{n+m}}{n+m}\right)+\frac{1+(-1)^{n+m}}{2}\Bigg) = 0$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \underline{\lim_{m\to\infty}}\ x_{m,n} = 1$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \overline{\lim_{m\to\infty}}\ x_{m,n} = 1$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\ \overline{\lim_{m\to\infty}}\ x_{m,n} = 0.$$

Deoarece $\underline{\lim_{n\to\infty}}\ \underline{\lim_{m\to\infty}}\ x_{m,n} \neq \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \overline{\lim_{m\to\infty}}\ x_{m,n}$, şirul dublu nu este convergent.

18. Să se determine limitele inferioară şi superioară pentru şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit de relaţiile de recurenţă

$$a_1 = 0, \quad a_{2m} = \frac{a_{2m-1}}{2}, \quad a_{2m+1} = \frac{1}{2} + a_{2m}.$$

R. Observăm că $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = \frac{1}{2}$, $a_4 = \frac{1}{4}$, dar

$$a_{2m+1} = \frac{1}{2} + \frac{a_{2m-1}}{2}$$

deci

$$2a_{2m+1} = 1 + a_{2m-1}$$

Din această relație de recurență obținem

$$2a_5 = 1 + a_3$$
$$2a_7 = 1 + a_5$$
$$2a_9 = 1 + a_7$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$2a_{2m+1} = 1 + a_{2m-1},$$

de unde rezultă $2^{m-1}a_{2m+1} = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{m-2} + a_3$ deci:

$$a_{2m+1} = \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^{m-2}} + \cdots + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^m} = 1 - \frac{1}{2^m};$$

sau

$$\lim_{m\to\infty} a_{2m+1} = 1.$$

La fel determinăm termenii pari; avem

$$2a_{2m+2} = \frac{1}{2} + a_{2m}$$

de unde obținem

$$2a_6 = \frac{1}{2} + a_4,$$
$$2a_8 = \frac{1}{2} + a_6,$$
$$2a_{10} = \frac{1}{2} + a_8$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$2a_{2m+2} = \frac{1}{2} + a_{2m}$$

sau

$$a_{2m+2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{m+1}},$$

$$\lim_{m\to\infty} a_{2m+2} = \frac{1}{2}$$

limitele șirului sînt $l = \frac{1}{2}$, $L = 1$; șirul nu este convergent.

19. *Sumabilitatea în sens Euler.* Să se arate că dacă șirul $(a_n)_{n\in N}$ este un șir convergent, șirul de termen general

$$u_n = \frac{1}{2^n}\,(a_0 + C_n^1 a_1 + \ldots + C_n^n a_n)$$

este de asemenea convergent către aceeași limită.

Să se dea exemplu de un șir (a_n) divergent pentru care (u_n) este convergent.

R: Presupunem că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Înseamnă că pentru $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ N(\varepsilon)$ astfel ca pentru $n > N_1(\varepsilon)$, $|a_n - a| < \varepsilon$.
Calculăm

$$u_n - a = \frac{1}{2^n}(a_0 + C_n^1 a_1 + \ldots + C_n^n a_n) - \frac{2^n a}{2^n} =$$

$$= \frac{1}{2^n}((a_0 - a) + C_n^1(a_1 - a) + \ldots + C_n^n(a_n - a)),$$

deoarece $2^n = 1 + C_n^1 + \ldots + C_n^i + \ldots C_n^n$.

Șirul $\left(\frac{n^p}{2^n}\right)_{p\in N}$ este convergent către zero, deci $(\forall)\ \varepsilon > 0\ (\exists)\ N_2(\varepsilon)$, astfel încît pentru orice $n > N_2(\varepsilon)$, $\frac{n^p}{2^n} < \varepsilon$. Atunci

$$|u_n - a| \leqslant \frac{1}{2^n}(\,|a_0 - a| + C_n^1|a_1 - a| + \ldots + C_n^N(a_{N_1} - a|\,) +$$

$$+ \frac{1}{2^n}(C_n^{N_1+1}|a_{N_1+1} - a| + \ldots + C_n^n|a_n - a|\,)\cdot$$

Fie $M = \max(|a_0 - a), \ldots, |a_{N_1} - a|)$, urmează

$$|u_n - a| \leqslant \frac{M}{2^n}(1 + C_n^1 + \ldots + C_n^{N_1}) + \frac{\varepsilon}{2^n}(C_n^{N_1+1} + \ldots + C_n^n) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{2^n}\left(1 + n + \frac{n^2}{2!} + \cdots + \frac{n^{N_1}}{N_1!}\right) + \frac{\varepsilon}{2^n}(1 + C_n^1 + \ldots + C_n^n)$$

$$\left(C_n^N = \frac{n(n-1)\ldots(n-N_1+1)}{N_1!} \leqslant \frac{n^{N_1}}{N_1!}\right)$$

$\leqslant M(N_1 + 1)\varepsilon + \varepsilon$ pentru $n > N = \max(N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon))$ obținem astfel că $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$.

Exemplu. Șirul $a_n = \cos nx$, $x \neq 2k\pi$, nu este convergent.

Șirul $u_n = \frac{1}{2^n}(1 + C_n^1 \cos x + C_n^2 \cos 2x + \ldots + C_n^n \cos nx) =$

$$= \frac{1}{2^n}\operatorname{Re}[(1 + \cos x + i \sin x)^n] =$$

$$= \frac{1}{2^n} 2^n \cos^n \frac{x}{2} \cos \frac{nx}{2},$$

deoarece $\left|\cos \frac{x}{2}\right| < 1$, urmează $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

20. Să se arate că numărul e este irațional.

R. Să presupunem că $e = \frac{p}{q}$ este rațional. Atunci

$$e - s_q < \frac{1}{q \cdot q!}, \quad s_q = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!}$$

sau

$$q!\, e - s_q q! < \frac{1}{q}.$$

Dar, $q!\, e$ este un număr întreg din ipoteză, deoarece $q!e = q!\frac{p}{q} = p(q-1)!$.

Numărul $q!(e - s_q)$ este întreg de asemenea, deoarece:

$$q! s_q = q!\left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right).$$

Cum $q \geqslant 1$, din faptul că $q!(e - s_q) < \frac{1}{q}$, ar rezulta că există un număr întreg cuprins între 0 și 1. Am ajuns astfel la o contradicție.

21. Într-un spațiu metric M un șir $(x_n)_{n\in N}$ pentru care distanțele $\rho(x_m, x_n)$, pentru orice $m, n, \in N$, sînt minorate de un număr pozitiv α, nu are nici un punct de acumulare.

R: Dacă y ar fi un punct de acumulare, există puncte din șir x_m, x_n, $m \neq n$, astfel încît

$$\rho(x_m, y) < \frac{\alpha}{2}, \quad \rho(x_n, y) < \frac{\alpha}{2}$$

însă

$$\rho(x_m, x_n) \leqslant \rho(x_m, y) + \rho(x_n, y) < \alpha$$

care împreună cu condiția din enunț $\rho(x_m, x_n) > \alpha$, duce la o contradicție.

22. Să presupunem că $(a_n)_{n\in N}$ și $(b_n)_{n\in N}$ sînt șiruri Cauchy în spațiul metric E. Să se arate că șirul $(\rho(a_n, b_n))_{n\in N}$ este convergent.

R: Din ipoteză, deoarece (a_n) și (b_n) sînt șiruri Cauchy în E, rezultă că $(\forall)\ \varepsilon > 0\ (\exists)\ N(\varepsilon)$ astfel că pentru $n, m > N(\varepsilon)$, $\rho(a_n, a_m) \leqslant \varepsilon$ și $\rho(b_n, b_m) \leqslant \varepsilon$.

Pentru a arăta că șirul $(\rho(a_n, b_n))_{n\in N}$ este convergent, este suficient să arătăm că $(\forall)\ \varepsilon > 0\ (\exists)\ N(\varepsilon)$, astfel că $|\rho(a_n, b_n) - \rho(a_m, b_m)| < \varepsilon$, $(\forall) m, n > N(\varepsilon)$.

Aceasta înseamnă că $(\rho(a_n, b_n))_{n\in N}$ este un șir Cauchy deci că șirul este convergent (în R orice șir Cauchy este convergent).

Din proprietățile distanței, putem scrie că

$$\rho(a_n, b_n) \leqslant \rho(a_n, b_m) + \rho(b_m, b_n) \leqslant \rho(a_n, a_m) + \rho(a_m, b_m) + \rho(b_m, b_n).$$

Dar:

$$\rho(a_n, b_n) - \rho(a_m, b_m) \leqslant \rho(a_n, a_m) + \rho(b_m, b_n) \leqslant 2\varepsilon.$$

23. Să se arate că dacă termenul general al unei serii numerice $\sum_1^\infty u_n$ este de forma

$$u_n = a_1 f(n+1) + a_2 f(n+2) + \ldots + a_p f(n+p)$$

cu

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_p = 0$$

și

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = 0$$

seria $\sum_1^\infty$ este convergentă. Să se calculeze suma ei.

R: Dacă calculăm suma parțială s_n a seriei $\sum_1^\infty u_n$, obținem

$$\begin{aligned} s_n = {} & a_1 f(2) + a_2 f(3) + \ldots + a_p f(1+p) + \\ & + a_1 f(3) + a_2 f(4) + \ldots + a_p f(2+p) + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a_1 f(n+1) + a_2 f(n+2) + \ldots + a_p f(n+p) \end{aligned}$$

și dacă ținem seama de relația $a_1 + a_2 + \ldots + a_p = 0$, avem

$$\begin{aligned} s_n = {} & a_1[f(2) + f(3) + \ldots + f(p)] + \\ & + a_2[f(3) + f(4) + \ldots + f(p)] + \ldots + a_{p-1} f(p) + \\ & + a_p[f(n+2) + f(n+3) + \ldots + f(n+p)] + \\ & + a_{p-1}[f(n+2) + f(n+3) + \ldots + f(n+p-1)] + \ldots + a_2 f(n+2). \end{aligned}$$

Deoarece șirul $(f(n))_{n\in N}$ este convergent și are limita zero, urmează că la orice $\varepsilon > 0$ există $N(\varepsilon)$ astfel încît

$$|f(n)| < \varepsilon \text{ pentru } n > N(\varepsilon).$$

Putem scrie deci

$$|s_n - A| < \varepsilon(|a_2| + 2|a_3| + \ldots + (p-1)|a_p|)$$

cu

$$A = \sum_{k=1}^{p-1} a_k [f(k+1) + f(k+2) + \ldots + f(p)]$$

de unde rezultă că șirul $(s_n)_{n\in N}$ este convergent și are limită numărul A care este deci suma seriei $\sum_1^\infty u_n$.

24. Fie seria de numere $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ în care $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant \ldots \geqslant 0$. Seria $\sum_1^\infty a_n$ converge atunci şi numai atunci cînd seria

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \ldots$$

converge. (Criteriul de condensare al lui Cauchy).

R: Fie $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ şi $\sigma_k = a_1 + 2a_2 + \ldots + 2^k a_{2^k}$. Pentru $n < 2^k$ avem:

$$s_n \leqslant a_1 + (a_2 + a_3) + \ldots + (a_{2^k} + \ldots + a_{2^{k+1}-1}) \leqslant$$

$$\leqslant a_1 + 2a_2 + \ldots + 2^k a_{2^k} = \sigma_k, \text{ deci, } s_n \leqslant \sigma_k.$$

Pentru $n > 2^k$:

$$s_n \geqslant a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \ldots + (a_{2^{k-1}+1} + \ldots + a_{2^k}) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} a_1 + a_2 + 2a_4 + \ldots + 2^{k-1} a_{2^k} = \frac{\sigma_k}{2}$$

astfel că: $2s_n \geqslant \sigma_k$.

Rezultă că şirul sumelor parţiale s_n şi σ_k sînt amîndouă mărginite sau nemărginite în acelaşi timp.

25. Folosind criteriul de condensare al lui Cauchy, să se studieze convergenţa seriilor

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad 2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}.$$

R: 1) Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge sau diverge odată cu seria

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^p} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(1-p)}.$$

Aceasta din urmă este o progresie geometrică de raţie $2^{(1-p)}$ deci este convergentă pentru $2^{1-p} < 1$, $1 - p < 0$, $p > 1$ şi divergentă pentru $2^{1-p} \geqslant 1$, $1 - p \geqslant 0$, $p \leqslant 1$.

2) Seria $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ este convergentă sau divergentă odată cu seria

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{2^k} \frac{1}{(\ln 2^k)^p} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln 2^k)^p} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p (\ln 2)^p} = \frac{1}{(\ln 2)^p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$$

dar aceasta este seria de la punctul 1) convergentă pentru $p > 1$ şi divergentă pentru $p \leqslant 1$.

26. Să se studieze natura seriilor de termen general

a) $$u_n = \sqrt{n^4 + 2n + 1} - n^2$$

b) $$u_n = \frac{1}{(\ln n)^p}, \qquad n \geqslant 2,$$

c) $$u_n = \ln n \cdot \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right), \; n \geqslant 2.$$

R. a) Scriem termenul general al seriei astfel:

$$u_n = \frac{(n^4 + 2n + 1) - n^4}{n^2 + \sqrt{n^4 + 2n + 1}} = \frac{2n + 1}{n^2 + \sqrt{n^4 + 2n + 1}} \sim \frac{2n}{2n^2}$$

seria are aceeaşi natură cu seria $v_n = \frac{1}{n}$ deci este divergentă.

b) $$\ln n < n, \; \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}; \; \frac{1}{(\ln n)^p} > \frac{1}{n^p}, \qquad , \; p > 0,$$

dar $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ este divergentă pentru $p \leqslant 1$, prin urmare pentru $p \in (0,1]$ seria $\sum_{n=2}^{\infty} u_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^p}$ este divergentă.

Pentru $p > 1$, $\frac{1}{(\ln n)^p} > \frac{A}{\sqrt{n}}$ deoarece $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{(\ln n)^p} = +\infty$ deci seria $\sum_{n=2}^{\infty} u_n$ este divergentă.

Pentru $p < 0$, $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$; condiţia necesară de convergenţă nu este îndeplinită; seria este divergentă pentru orice p.

c) Seria $u_n = \ln n \cdot \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$, $n \geqslant 2$ este o serie alternată. Aplicăm criteriul lui Leibniz.

$$(\alpha) \quad \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \ln n \left[\frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{(-1)^n}{3n^2}\right] = 0.$$

Trebuie arătat că $|u_n|$, $n = 2, 3, \ldots$, este un şir monoton descrescător; din (α) rezultă că seria $\sum_{2}^{\infty} u_n$ şi seria $\sum_{2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \ln n$ au aceeaşi natură. Dar funcţia $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ are $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0$ dacă $\ln x > 1$, $x > e$; deci funcţia este monoton descrescătoare şi de aici şirul de termen general

$$|u_n| = \frac{\ln n}{n}$$

este monoton descrescător, cu limita zero, prin urmare seria dată este convergentă.

27. Se poate aplica criteriul raportului pentru a stabili natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{(-1)^n - n}$?

R: Această serie este o serie cu termeni pozitivi și anume:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \cdots$$

dar:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \text{ nu există.}$$

Șirul $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n\in N}$ are două puncte limită:

Astfel:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2 \text{ și } \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{8}.$$

O formulare mai rafinată a criteriului afirmă că dacă:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1, \qquad \sum_{1}^{\infty} a_n, \text{ convergentă,}$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1, \qquad \sum_{1}^{\infty} a_n, \text{ divergentă,}$$

prin urmare seria este divergentă.

28. Fie α și β, două numere reale astfel ca $\alpha > 1$, $0 < \beta < 1$. Se consideră seria de termen general u_n definită astfel: $u_0 = 0$ și pentru $n > 0$, $u_{2^p} = \frac{1}{(2^p)^\beta}$; $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ $n_n \neq 2^p$. Să se arate că seria este convergentă. Se poate aplica criteriul raportului?

R: Seria de termen general $\frac{1}{(2^p)^\beta}$ este o progresie geometrică convergentă.

Scriem seria sub forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{\substack{n=1 \\ n\neq 2p}}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2^{p\beta}} - \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2^{p\alpha}}.$$

Toate cele trei serii care apar în membrul 2 sînt convergente, deci seria $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ este convergentă. Dacă $n = 2^p$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2^p)^\beta}{(n+1)^\alpha} \to 0 \text{ cînd } n \to \infty;$$

dacă $n + 1 = 2^p$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^\alpha}{(2^p+1)^\beta} \to \infty \text{ cînd } n \to \infty;$$

dacă $n,\ n+1 \neq 2^p$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} \to 1, \text{ cînd } n \to \infty;$$

deci şirul $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ nu are limită şi nu este nici mărginit. Nu se poate aplica criteriul raportului.

29. Să se stabilească natura seriilor Σa_n unde

a) $$a_n = \left[e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^p$$

b) $$a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^p \ln\frac{n+1}{n-1},\ n > 1.$$

R: a) Deoarece

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

avem

$$0 < e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

sau încă

$$e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n},$$

deci

$$a_n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{np} \frac{1}{n^p}.$$

Seria de termen general $v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{np} \frac{1}{n^p}$ are aceeaşi natură cu seria de termen general $\frac{1}{n^p}$, deoarece factorul $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{np} \to e^p$; deci seria a) este convergentă pentru $p > 1$.

b) Putem scrie

$$\frac{1}{(2\sqrt{n+1})^p} \ln\frac{n+1}{n-1} < a_n = \frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^p} \ln\frac{n+1}{n-1} < \frac{1}{(2\sqrt{n})^p} \ln\frac{n+1}{n-1}.$$

Să considerăm seria $b_n = \frac{1}{2^p n^{p/2}} \ln\frac{n+1}{n-1}$ şi să studiem natura acestei serii cu criteriul logaritmic

$$\frac{\ln\frac{1}{b_n}}{\ln n} = \frac{p\ln 2 + \frac{p}{2}\ln n - \ln\left(\ln\frac{n+1}{n-1}\right)}{\ln n} \to \frac{p}{2} > 1.$$

Pentru $p > 2$ seria este deci convergentă.

Seria din stînga inegalității este asemănătoare și este divergentă pentru $p < 2$.

Pentru $p = 2$,

$$a_n = \frac{1}{(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2} \ln \frac{n+1}{n-1} =$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2} \ln (n+1) - \frac{1}{(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2} \ln (n-1)$$

amîndouă seriile obținute sînt divergente, deci seria este divergentă pentru $p = 2$.

30. Să se studieze natura seriei ($a,\ b,\ \in R$)

$$\frac{a+1}{a} \cdot b + \left(\frac{a+2}{a+1} b\right)^2 + \cdots + \left(\frac{a+n}{a+n-1} b\right)^n + \cdots$$

R: Aplicăm criteriul rădăcinii pentru seria modulelor. Avem

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \left|\frac{a+n}{a+n-1} b\right| = \left|\frac{a+n}{a+n-1}\right| \cdot |b|$$

și

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u|} = |b|,$$

prin urmare pentru $|b| < 1$ seria dată este absolut convergentă. Pentru $|b| \geqslant 1$, putem scrie

$$\left|\frac{a+n}{a+n-1} \cdot b\right| = \left|\frac{a+n}{a+n-1}\right| \cdot |b| > |b| \geqslant 1$$

deci, în acest caz,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a+n}{a+n-1} \cdot b\right)^n \neq 0$$

și seria din enunț este divergentă.

31. Să se arate că șirul de termen general $a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$, $n \in N$ este convergent.

R: Vom asocia acestui șir seria de numere:

$$a_1 + (a_2 - a_1) + \ldots + (a_n - a_{n-1}) + \ldots$$

pentru care șirul (a_n) reprezintă șirul sumelor parțiale

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} + 2\sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} - 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = \frac{\sqrt{n-1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})} = \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})^2}.$$

Acesta este termenul general al unei serii Riemann convergentă, deci şirul sumelor parţiale care este şirul $(a_n)_{n\in N}$ este convergent.

32. Să se arate că seria de termen general.

$$u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n} + (-1)^n}$$

este divergentă.

Să se motiveze de ce nu se poate aplica în acest caz criteriul lui Leibniz pentru serii alternate.

R: Nu putem aplica criteriul lui Leibniz, deoarece, deşi seria este alternată, şirul termenilor seriei în valoare absolută nu formează un şir monoton descrescător.

Avem în adevăr

$$u_{2p} = \frac{-1}{\sqrt{2p}+1} \qquad u_{2p-1} = \frac{1}{\sqrt{2p+1}-1};$$

să calculăm

$$S_{2p+1} = u_2 + u_3 + \ldots + u_{2p-1} + u_{2p}$$

$$S_{2p+1} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1}\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{5}-1} - \cdots + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{2p-1}-1}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2p}+1} + \frac{1}{\sqrt{2p+1}-1}\right) =$$

$$= \frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{3}-1)(1+\sqrt{2})} + \frac{4-\sqrt{5}}{3(\sqrt{5}-1)} + \cdots + \frac{2+\sqrt{2p}-\sqrt{2p+1}}{(\sqrt{2p}+1-1)(1+\sqrt{2p})}.$$

Observăm că pentru orice $p \in N$

$$2 + \sqrt{2p} - \sqrt{2p+1} > 1,$$

deoarece

$$\sqrt{2p+1} - \sqrt{2p} < 1,$$

sau

$$\frac{1}{\sqrt{2p}(\sqrt{2p}+1)} < 1;$$

cu această observaţie, vom scrie:

$$S_{2p+1} > \frac{1}{(1+\sqrt{2})(\sqrt{3}-1)} + \frac{1}{(1+2)(\sqrt{5}-1)} + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{(1+\sqrt{2p})(\sqrt{2p+1}-1)} \geqslant \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{3}} + \frac{1}{2\cdot 2\cdot\sqrt{5}} + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{2p}\sqrt{2p+1}} \geqslant \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2p+1}\right],$$

însă

$$\sigma_p = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2p+1}$$

este suma parțială de ordinul p a seriei divergente

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2p+1} + \cdots$$

deci seria dată inițial este divergentă.

33. Se dă seria numerică

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(n^2+n+1)^{\alpha}} \frac{1}{\ln^{\beta}(n+2)}.$$

Să se discute convergența simplă și absolută după parametrii reali α și β.

R: Pentru seria modulelor

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{(n^2+n+1)^{\alpha}} \frac{1}{\ln^{\beta}(n+2)}$$

observăm că

$$[1) \qquad \frac{\sqrt{n+1}}{(n^2+n+1)^{\alpha}} \frac{1}{\ln^{\beta}(n+2)} \approx \frac{1}{n^{2\alpha-1/2}} \frac{1}{\ln^{\beta}(n+2)},$$

deci o comparăm cu seria lui J. Bertrand cu termenul general

$$v_n = \frac{1}{n^{\gamma}} \frac{1}{\ln^{\delta} n},$$

prin urmare, pentru $2\alpha - \frac{1}{2} > 1$, $\alpha > \frac{3}{4}$ și $\beta \in R$ sau pentru $\alpha \geqslant \frac{3}{4}$ și $\beta > 1$, seria dată este absolut convergentă.

Pentru studiul convergenței simple, ținem seamă că este o serie alternată, deci putem aplica criteriul lui Leibniz. Din (1) rezultă că pentru $2\alpha - \frac{1}{2} > 0$, deci $\alpha > \frac{1}{4}$ și $\beta \in R$ sau pentru $\alpha = \frac{1}{4}$, $\beta > 0$ seria este simplu convergentă. Pentru $\alpha = \frac{1}{4}$, $\beta \leqslant 0$ sau pentru $\alpha < \frac{1}{4}$, $\beta \in R$, seria din enunț este divergentă.

34. Să se studieze convergența absolută și convergența simplă pentru seria:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(1+p)(2+p)\ldots(n+p)}{n!\, n^{q}}.$$

R: Pentru studiul convergenței absolute aplicăm criteriul lui Raabe și Duhamel seriei

$$|u_n| = \frac{|1+p|\,|2+p|\ldots|n+p|}{n!\, n^{q}}$$

avem

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right| - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\,\frac{(n+1)^{q+1} - n^q(n+p+1)}{n^q(n+p+1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{q+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{q+1} - n^{q+1} - n^q p - n^q}{n^{q-1}(n+p+1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{q+1}\left(1+\frac{q+1}{n}+\frac{(q+1)q}{2!\,n^2}+\cdots\right) - n^{q+1} - pn^q - n^q}{n^{q-1}(n+p+1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^q(q-p) + n^{q-1}\frac{q(q+1)}{2!} + \cdots}{n^{q-1}(n+p+1)} = q - p > 1;$$

deci seria este absolut convergentă pentru $q - p > 1$.

Studiem convergența simplă a seriei pentru $q \leqslant p + 1$.

Trebuie găsită relația între p și q pentru care

$$\lim_{n\to\infty} |u_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{|1+p|\,|2+p|\ldots|n+p|}{n!\,n^q} = 0$$

și se vede că are loc pentru $p < q$.

35. Să se determine pentru perechea parametrilor (p, x) ai seriei:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p}, \qquad x \in (0, \pi)$$

mulțimea în care este absolut convergentă sau simplu convergentă.

R: Deoarece $\left|\frac{\cos nx}{n^p}\right| \leqslant \frac{1}{n^p}$ și seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ este convergentă pentru $p > 1$ rezultă că seria este absolut convergentă pentru $p > 1$ și $x \in R$.

Pentru a studia convergența simplă, aplicăm criteriul lui Abel cu

$$u_n = \cos nx, \; a_n = \frac{1}{n^p};$$

$$|u_1 + \ldots + u_n| = \left|\frac{\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|},$$

$$\frac{x}{2} \neq k\pi, \; x \neq 2k\pi$$

și pentru $\frac{1}{n^p} \to 0$ pentru $p > 0$. Rezultă că pentru $p > 0$ și $x \in R - \{2k\pi, k \in Z\}$, seria este simplu convergentă.

36. Să se arate că seria

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}$$

este convergentă. Să se determine o majorantă a erorii pe care o facem dacă suma S se aproximează cu S_n. Caz particular $n = 10$.

R: Criteriul raportului ne dă

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+1)} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1) = \frac{1}{2n+1}$$

şi

$$\lim_{n \to \infty} = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2n+1} = 0;$$

prin urmare seria este convergentă. Avem şi

$$R_n = \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+1)} \left(1 + \frac{1}{2n+3} \frac{1}{(2n+3)(2n+5)} + \cdots\right) <$$

$$< \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+1)} \left(1 + \frac{1}{2n+3} + \frac{1}{(2n+3)^2} + \cdots\right) <$$

$$< \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+1)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2n+3}} = \frac{2n+3}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+1)(2n+2)}$$

pentru $n = 10$, obţinem

$$R_{10} < \frac{23}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots 19 \cdot 21 \cdot 22}$$

37. Fie $u_0, u_1, \ldots, u_n$ un şir de numere pozitive. Cu ajutorul lor să formăm şirul $(P_n)_{n \in N}$

$$P_n = (1 + u_0)(1 + u_1) \ldots (1 + u_n).$$

Să se arate că şirul (P_n) este convergent dacă seria

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$$

este convergentă şi reciproc.

R: Avem evident

$$(\alpha) \qquad P_n > 1 + u_0 + u_1 + \ldots + u_n$$

şi pentru că $e^x > 1 + x$, $x > 0$ avem şi

$$(\beta) \qquad P_n < e^{u_0 + u_1 + \ldots + u_n}$$

Deoarece șirul $(P)_n$ este monoton crescător din (β), rezultă că dacă seria $\sum_1^\infty u_n$ este convergentă și șirul (P_n) este convergent. Reciproc, din (α) dacă (P_n) este convergent, urmează că și seria $\sum_0^\infty u_n$ este convergentă.

Dacă punem

$$P = \prod_0^\infty (1 + u_k) = (1 + u_0)(1 + u_1) \dots (1 + u_n) \dots$$

avem definită operația de înmulțire a o infinitate de numere. Prin operația

$$\prod_0^\infty (1 + u_k)$$

se definește ceea ce se numește un „produs infinit".

Dacă seria $\sum_0^\infty |u_n|$ este convergentă, rezultatul de mai sus va rămîne valabil, anume produsul infinit

$$\prod_0^\infty (1 + u_n)$$

este convergent. Se spune în acest caz că este absolut convergent.

38. Să se arate că seriile

a) $$1 + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot 3^{n+1}} + \dots$$

b) $$1 - \frac{1}{1 \cdot} \cdot \frac{1}{4 \cdot} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{10} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{28} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \frac{1}{3^n + 1} + \dots$$

sînt convergente. Să se aproximeze sumele cu trei zecimale exacte.

R: a) Observăm că avem

$$\frac{1}{n\,3^{n-1}} \leqslant \frac{1}{3^n}, \quad n = 3, 4, 5, \dots$$

și folosind criteriul comparației, deoarece seria

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots$$

este convergentă, rezultă că seria (a) este convergentă. Dacă luăm pentru S pe S_n dat de

$$S_n = 1 + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n\,3^{n-1}}$$

atunci

$$R_n = \frac{1}{(n+1)\,3^n} + \frac{1}{(n+2)\,3^{n+1}} + \dots < \frac{1}{n+1} \frac{1}{3^n} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots\right)$$

deci

$$R_n = \frac{1}{n+1}\,\frac{1}{3^n}\,\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{3^{n-1}}\cdot\frac{1}{2} < \frac{1}{10^3}$$

neegalitatea este satisfăcută pentru $n = 6$. Avem deci

$$S \sim S_6 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 3^2} + \frac{1}{4\cdot 3^3} + \frac{1}{5}\,\frac{1}{3^4} + \frac{1}{6\cdot 3^5}.$$

b) Seria este alternată. Deoarece

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!}\,\frac{1}{3^n+1} = 0$$

aplicînd criteriul lui Leibniz, rezultă că seria este convergentă. Pentru seriile alternate eroarea, cînd aproximăm pe S cu S_n este dată de primul termen neglijat. Deci trebuie să avem

$$\frac{1}{n!}\,\frac{1}{3^n+1} < \frac{1}{10^3}$$

satisfăcută pentru $n = 4$. Rezultă

$$S \sim S_4 = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{20} - \frac{1}{168}$$

și pentru că primul termen neglijat este pozitiv, aproximarea este prin lipsă.

39. Să se stabilească dacă produsele infinite

a) $$\prod_2^\infty \frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$$

și

b) $$\prod_1^\infty \left(\frac{n+1}{n}\right)$$

sînt sau nu convergente.

R: a) În primul caz, putem scrie

$$\frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{n^2-1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n^2}$$

și, pentru că seria $\sum_2^\infty \frac{1}{n^2}$ este convergentă, produsul

$$\prod_2^\infty \frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$$

este convergent.

b) Avem $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$, însă seria $\sum_1^\infty \frac{1}{n}$ este divergentă, prin urmare produsul infinit (b) este divergent.

40. Seria

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\cdots-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}-\cdots$$

este convergentă (și are suma zero) cît și seria formată cu pătratul termenilor ei. Să se formeze produsele infinite asociate și să se facă legătura cu formula lui Wallis.

R: Avem

$$(\alpha)\quad P=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)\cdots$$

sau

$$P=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n}\cdots$$

care este convergent. Ținînd seamă de formula lui Wallis, obținem imediat

$$P=\frac{2}{\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\ldots(2n-1)^2}{2^2\cdot 4^2\ldots(2n)^2}(2n+1).$$

Dacă în (α) grupăm termenii doi cîte doi, avem

$$\frac{2}{\pi}=\prod_1^\infty\left(1-\frac{1}{4n^2}\right).$$

În partea a doua avem un produs absolut convergent.

41. Se dă seria cu termeni pozitivi

$$(1)\qquad u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$$

și un șir de numere reale

$$a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$$

a) Dacă există două numere naturale p, N și un număr $\lambda>0$ astfel încît pentru orice $n>N$ să avem

a_1) $\quad\frac{1}{u_{n+p}}s_{p,n}\geqslant\lambda,$

a_2) $\quad s_{p-1,n}>0,$

unde

$$s_{pn}=a_nu_n-C_p^1a_{n+1}u_{n+1}+\ldots+(-1)^pC_p^pa_{n+p}u_{n+p}$$

atunci seria dată (1) este convergentă.

b) Seria (1) este divergentă dacă cu notaţiile de mai sus şi $\lambda \leqslant 0$ avem

$b_1)$ $\dfrac{1}{u_{n+p}} s_{p,n} \leqslant \lambda$,

$b_2)$ $s_{p-1,n} > 0$,

$b_3)$ $s_{p-2,n} + s_{p-3,n} + \ldots + s_{0,n} \geqslant 0$

$b_4)$ seria $\sum_1^\infty \dfrac{1}{a_n}$ este divergentă

R: a') Deoarece $s_{p,n} = s_{p-1,n} - s_{p-1,n+1}$ din condiţia (a_1) rezultă

$$\lambda u_{n+p} \leqslant s_{p-1,n} - s_{p-1,n+1} < 0$$

şi pentru că $s_{p-1,n} > 0$, urmează că şirul cu termenul general $s_{p-1,n}$ este monoton descrescător, deci convergent. Rezultă de aici că seria cu termenul general $s_{p,n}$ este convergentă şi are ca sumă pe $s_{p-1,1} - l$ unde $l = \lim\limits_{n\to\infty} s_{p-1,n}$. Din $u_{n+p} \leqslant \dfrac{1}{\lambda} s_{p,n}$ folosind criteriul comparaţiei deducem că seria $\sum_1^\infty u_n$ este convergentă.

b') Pentru a demonstra punctul (b) observăm că

$$0 > \lambda u_{n+p} \geqslant s_{p-1,n} - s_{p-1,n+1} < 0$$

deci şirul cu termenul general $s_{p-1,n}$ este monoton crescător.

Există un număr $A > 0$ astfel încît pentru $n > N$ să avem $s_{p-1,n} > A$, sau

$$u_n > \frac{A}{a_n} + C_{p-1}^1 \frac{a_{n+1}}{a_n} u_{n+1} - C_{p-1}^2 \frac{a_{n+2}}{a_n} u_{n+2} + \ldots + (-1)^p C_{p-1}^{p-1} \frac{a_{n+p-1}}{a_n} u_{n+p-1}$$

însă $a_n > 0$ şi seria $\sum_1^\infty \dfrac{1}{a_n}$ este divergentă, iar

$$C_{p-1}^1 a_{n+1} u_{n+1} - C_{p-1}^2 u_{n+2} a_{n+2} + \ldots + (-1)^p C_{p-1}^{p-1} a_{n+p-1} u_{n+p-1} =$$
$$= s_{p-2,n+1} + s_{p-3,n+1} + \ldots + s_{0,n+1} > 0$$

prin urmare avem $u_n > \dfrac{A}{a_n}$ şi folosind criteriul comparaţiei rezultă că seria (1) $\sum_1^\infty u_n$ este divergentă.

Dacă $p = 1$ şi şirul (a_n) are termenii pozitivi, obţinem criteriul lui Kummer.

42. Fie $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ o serie cu termeni oarecare şi

$$(u_1 + u_2 + \ldots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \ldots + u_{n_2}) + \ldots$$
$$+ (u_{n_{k-1}+1} + u_{n_{k-1}+2} + \ldots + u_{n_k}) + \ldots \quad (1)$$

aceeaşi serie grupată astfel că fiecare grupă conţine termeni de acelaşi semn.

Dacă seria (1) este convergentă, atunci seria inițială este convergentă.

Aplicație: natura seriei de termen general $u_n = \frac{(-1)^{E(\sqrt{n})}}{n}$.

R: Fie $(\sigma_n)_{n\in N}$ șirul sumelor parțiale ale seriei inițiale și s_k șirul sumelor seriei (1).

Fie $\varepsilon > 0$, $(\exists)\, k_0$; $k > k_0$, $s - \varepsilon < s_k < s + \varepsilon$.

Pentru $n_{k-1} < n < n_k$, $s_{k-1} < \sigma_n < s_k$ sau $s_k < \sigma_n < s_{k-1}$, unde $s_k = \sigma_{n_k}$; dar

$$s - \varepsilon < s_{k-1} < s_k < s + \varepsilon.$$

Aplicație. Ținînd seamă de definiția lui $E(\sqrt{n})$ obținem:

$$E(\sqrt{n}) = \begin{cases} 1, & 1 \leqslant n < 4 \\ 2, & 4 \leqslant n < 9 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ m, & m^2 \leqslant n < (m+1)^2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Vom forma o nouă serie grupînd termenii astfel:

$$(2) \qquad \underbrace{-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}}_{2\cdot 1 + 1} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{8}\right)}_{2\cdot 2 + 1} - \dots$$

Seria astfel așezată se scrie ca $\Sigma (-1)^m u_{m^2}$, deci o serie alternată unde

$$|u_{m^2}| = \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^2+1} + \dots + \frac{1}{(m+1)^2 - 1} = \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^2+1} + \dots + \frac{1}{m^2 + 2m}$$

însă

$$|u_{m^2}| \leqslant \frac{2m+1}{m^2}$$

trecînd la limită obținem că

$$\lim_{m\to\infty} |u_{m^2}| = 0,$$

iar șirul $|u_{m^2}|$ este monoton descrescătoare. În baza criteriului lui Leibniz seria (2) este convergentă, deci seria

$$\sum_1^\infty \frac{(-1)^{E(\sqrt{n})}}{n} \text{ este convergentă.}$$

43. Să se studieze natura seriilor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, precum și a seriei produs pentru $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. Să se justifice de ce seria produs nu este convergentă.

R: Seriile $\sum_1^\infty a_n$ și $\sum_1^\infty b_n$ converg conform criteriului lui Leibniz de la serii alternate.

Seria produs este seria $\sum_1^\infty C_n$, unde

$$C_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0 = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{2}} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{1}} = (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{1}} \right).$$

Seria fiind tot alternată observăm că

$$|C_n| \geqslant \frac{2}{n+2} + \cdots + \frac{2}{n+2} = \frac{2(n+1)}{n+2} \geqslant 1; \quad n = 0, 1, 2, \ldots n+1,$$

deci $\lim_{n\to\infty} |C_n| \neq 0$.

O b s e r v a ț i e . Pentru ca seria produs să fie convergentă trebuie ca cel puțin una din cele 2 serii factori să fie absolut convergentă (Mertens).

44. Seria $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \ldots$ este convergentă și are suma s. Să se arate că seria

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots$$

este convergentă și are suma $\frac{s}{2}$.

R: Fie

$$\sigma_{3n} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} \right) =$$

$$= \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} = \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right) \frac{1}{2}$$

suma parțială a seriei rearanjate.

Observăm că $\sigma_{3n} = \frac{s_{2n}}{2}$ și, cum $\lim_{n\to\infty} s_{2n} = s$, rezultă că $\lim_{n\to\infty} \sigma_{3n} = \frac{s}{2}$

$$\sigma_{3n+1} = \sigma_{3n} + \frac{1}{2n+1}, \quad \sigma_{3n+2} = \sigma_{3n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{4n+2}$$

și

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{3n+1} = \lim_{n\to\infty} \sigma_{3n+2} = \lim_{n\to\infty} \sigma_{3n} = \frac{s}{2}.$$

O b s e r v a ț i e. Seria nu-și păstrează suma prin reașezarea a o infinitate de termeni deoarece este semiconvergentă (Riemann).

45. Cîți termeni trebuie însumați pentru a obține suma seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}$ cu 3 zecimale exacte?

R: Seria dată este o serie cu termeni pozitivi pentru care

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} \cdot \frac{(n+1)!}{(n+2)!} = \frac{2}{n+2} < \frac{1}{3}$$

pentru orice $n > 4$.

În acest caz:

$$S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots < u_n \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^k} + \ldots \right);$$

trebuie să punem condiția ca restul seriei să fie inferior lui 10^{-5}

$$R_n = S - S_n = \frac{2}{(n+1)!} \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{2^{n-1}}{(n+1)!} < \frac{1}{10^3};$$

inegalitatea este satisfăcută pentru $n = 9$;
deci

$$S \approx u_1 + u_2 + \ldots + u_9.$$

46. Să se arate că seria $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lg^3 n}$ este convergentă și să se determine numărul de termeni ce trebuie însumați pentru a obține suma seriei cu 3 zecimale exacte.

R: Seria este convergentă conform criteriului lui Leibniz, deoarece:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\lg^3 n} = 0.$$

Eroarea pe care o comitem în acest caz cînd însumăm un număr n de termeni este inferioară primului termen neglijat, deci:

$$|s - s_n| = |u_{n+1}| = \frac{1}{\lg^3(n+1)} < \frac{1}{10^3}$$

$$\lg^3(n+1) > 10^3, \quad \lg(n+1) > 10;$$

$$n + 1 < 10^{10}, \quad n > 10^{10} - 1.$$

Se observă că seria este foarte slab convergentă.

47. Se consideră seria $\sum\limits_{\substack{n\geqslant 1\\ n\neq m}} \frac{1}{m^2-n^2}$, unde m este un număr natural.

a) Să se arate că seria este convergentă și să se determine suma ei
b) Fie

$$u_{mn}=\begin{cases}\dfrac{1}{m^2-n^2}, & m\neq n\\ 0, & m=n\end{cases}$$

termenul general al unui șir dublu. Să se arate că

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_{mn}\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}u_{mn}\right)\neq 0.$$

R: a) Seria este convergentă, deoarece toți termenii seriei (în afara unui număr finit) au același semn și este comparabilă cu seria Riemann $\frac{1}{n^2}$.

Pentru calculul sumei, fie S_k, $k=3m+p$. Observăm că $\frac{1}{m^2-n^2}=$ $=\frac{1}{2m}\left[\frac{1}{m-n}+\frac{1}{m+n}\right]$. Obținem

$$S_{3m+p}=\frac{1}{2m}\left[\frac{1}{m-1}+\frac{1}{m-2}+\ldots+\frac{1}{m-(m-1)}+\frac{1}{m-(m+1)}+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{m-(3m+p)}+\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\ldots+\frac{1}{2m-1}+\frac{1}{2m+1}+\ldots+\frac{1}{4m+p}\right]=$$

$$=\frac{1}{2m}\left[\frac{1}{m-1}+\frac{1}{m-2}+\ldots+\frac{1}{1}-\frac{1}{1}-\frac{1}{2}-\ldots-\right.$$

$$-\frac{1}{2m+p}+\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\ldots+\frac{1}{2m-1}+\frac{1}{2m+1}+\ldots+$$

$$\left.+\frac{1}{4m+p}\right]=\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m}\right)+\left(\frac{1}{m+2}-\frac{1}{m+1}\right)+\ldots+\right.$$

$$+\left(\frac{1}{2m-1}-\frac{1}{2m-2}\right)+\left(-\frac{1}{2m-1}\right)+\left(\frac{1}{2m+1}-\frac{1}{2m}\right)+\ldots+$$

$$\left.+\left(\frac{1}{2m+p+1}-\frac{1}{2m+p}\right)+\frac{1}{2m+p+2}+\ldots+\frac{1}{2m+(p+2m)}\right].$$

Reducînd termenii asemenea, obținem:

$$S_{3m+p} = \frac{1}{2m}\left[-\frac{1}{m} - \frac{1}{2m} + \left(\frac{1}{2m+p+2} + \ldots + \frac{1}{2m+(p+2m)}\right)\right] =$$

$$= \frac{3}{4m^2} + \frac{1}{2m}\left(\frac{1}{2m+p+2} + \ldots + \frac{1}{2m+(p+2m)}\right).$$

Observăm că

$$\frac{m}{2m+(p+2m)} < \frac{1}{2m+p+2} + \ldots + \frac{1}{2m+(p+2m)} < \frac{m}{2m+p+2},$$

deci

$$\lim_{p\to\infty}\left(\frac{1}{2m+p+2} + \ldots + \frac{1}{2m+(p+2m)}\right) = 0.$$

De aici rezultă

$$\lim_{p\to\infty} S_{3m+p} = -\frac{3}{4m^2}.$$

b) Din a) rezultă că $\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn} = -\frac{3}{4m^2}$.

și

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_{mn} = \frac{3}{4n^2}.$$

Deoarece $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ există și este finită, obținem rezultatul enunțat.

48. Să se arate că dacă

$$p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$$

este șirul numerelor prime, iar $\alpha \in R$, $\alpha > 1$, atunci are loc egalitatea

$$\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-p_i^{-\alpha}} + \sum_{1}^{\infty} n^{-\alpha}.$$

Seria din partea a doua este convergentă, deoarece este seria lui Riemann cu $\alpha > 1$. Produsul infinit din partea întîi este convergent, deoarece

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{p_i^{\alpha}} < \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}} < \infty$$

șirul numerelor prime fiind un subșir al numerelor naturale. Putem scrie

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p_i^{\alpha}}} = 1 + \frac{1}{p_i^{\alpha}} + \frac{1}{p_i^{2\alpha}} + \ldots + \frac{1}{p_i^{k\alpha}} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(p_i^{\alpha})^k}$$

să notăm

$$(\beta) \qquad P(m) = \prod_{i=1}^{\overline{m}}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_i^{\alpha}}}\right) = \prod_{i=1}^{\overline{m}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(p_i^{\alpha})^k},$$

unde m este un număr prim din șir, iar $p_{\overline{m}} = m$.

Dacă facem produsele seriilor din partea a doua în (β) obținem

$$P(m) = \Sigma^{*} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

unde Σ^{*} se extinde la toate numerele naturale n care admit factori primi pe toți $p_i \leqslant m$.

Dacă

$$\Sigma^{**} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

este suma pentru $n \in N$ și n are factori primi numai numerele prime $p_i > m$, atunci rezultă

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} - P(m) = \sum_{i>\overline{m}}^{\infty **} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

însă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\overline{M}(\varepsilon) \in N$ încît pentru $\overline{m}_0 > \overline{M}(\varepsilon)$ să avem

$$\sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} < \varepsilon.$$

deci și

$$\Sigma^{**} \frac{1}{n^{\alpha}} < \varepsilon$$

de unde rezultă că

$$\lim_{m \to \infty} P(m) = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}.$$

49. Să se arate că șirul

$$P_n^{*} = (1 - u_0)(1 - u_1) \ldots (1 - u_n)$$

are limita zero dacă seria cu termeni pozitivi $\sum_{0}^{\infty} u_n$ este divergentă și $0 < u_k < 1$.

R: Funcția

$$\varphi(x) = e^{x} - x - 1, \qquad x \in R$$

are un minimum pentru $x = 0$, deci pentru orice x, avem

$$e^{x} - x - 1 > 0, \qquad x \in R,\ x \neq 0$$

deci și

$$e^{-x} > 1 - x, \quad x > 0$$

de unde obținem

$$(1 - u_0)(1 - u_1) \ldots (1 - u_n) < e^{-(u_0 + u_1 + \ldots + u_n)}$$

și pentru că pentru orice $n > N$, $P_n^{*} > 0$, rezultă

$$\lim_{n \to \infty} (1 - u_0)(1 - u_1) \ldots (1 - u_n) = 0,$$

deoarece

$$\lim_{n \to \infty} e^{-(u_0 + u_1 + \ldots + u_n)} = 0$$

CAPITOLUL III

FUNCȚII. LIMITE. CONTINUITATE.

1. Să notăm cu $F(A)$ imaginea mulțimii A prin aplicația F.

Să se demonstreze relațiile:

a) $F(A \cap B) \subset F(A) \cap F(B)$

b) $F(A \cup B) = F(A) \cup F(B)$

c) $C_{F(A)}F(B) \subset F(C_A B)$, $\quad (B \subset A)$.

În ce situații incluziunile de mai sus se transformă în egalități?

R: a) Fie $y \in F(A \cap B)$; din definiția mulțimii imagine există $x \in A \cap B$ astfel încît $F(x) = y$; rezultă că $x \in A$ și $x \in B$, deci $F(x) \in F(A)$ și $F(x) \in F(B)$, prin urmare $F(x) \in F(A) \cap F(B)$.

Pentru ca incluziunea să se transforme în egalitate, să vedem în ce condiții

$$F(A) \cap F(B) \subset F(A \cap B).$$

Fie $y \in F(A) \cap F(B)$; atunci $y \in F(A)$ și $y \in F(B)$. Există deci $x \in A$ pentru care $F(x) = y$ și $x' \in B$ pentru care $F(x') = y$.

Pentru a avea egalitate este necesar ca $x' = x$, deci aplicația F trebuie să fie injectivă.

b) Vom arăta că $F(A \cup B) = F(A) \cup (B)$; fie $y \in F(A \cup B)$; există $x \in A \cup B$ pentru care $F(x) = y$; deci $x \in A$ sau $x \in B$, de unde $F(x) \in F(A)$ sau $F(x) \in F(B)$ care duce la $F(x) \in F(A) \cup F(B)$.

Pentru a demonstra incluziunea în sens invers fie $y \in F(A) \cup F(B)$; înseamnă că $y \in F(A)$ sau $y \in F(B)$. $(\exists)\ x \in A$ sau $x \in B$ pentru care $y = F(x)$, deci $y \in F(A \cup B)$.

Cu aceasta egalitatea (b) este demonstrată.

c) Fie $y \in C_{F(A)}F(B)$; aceasta înseamnă că $y \in F(A)$. $y \notin F(B)$. Există $x \in A$ pentru care $y = F(x)$ și, în același timp $x \notin B$ pentru că altfel $F(x) \in F(B)$; rezultă de aici că $x \in C_A B$ și deci $y \in F(C_A B)$.

Să vedem ce condiție trebuie impusă aplicației F pentru ca incluziunea între cele două mulțimi să aibă loc și în sens invers.

Să presupunem că $y \in (C_A B)$; există $x \in C_A B$ pentru care $y = f(x)$; deoarece $x \in C_A B \to x \notin B$, dar $x \in A \to F(x) \notin F(B)$ şi $F(x) \in F(A)$. Pentru ca acest lucru să se întîmple trebuie ca x să fie unic, adică F trebuie să fie injectivă.

Pentru a ilustra cele de mai sus să considerăm următorul exemplu: fie

$$A = [-1, 1], \quad B = \left[\frac{1}{2}, 1\right] \quad \text{şi} \quad F(x) = x^2,$$

avem

$$F(A) = [0, 1]; \quad F(B) = \left[\frac{1}{4}, 1\right]; \quad C_{F(A)}(F(B)) = \left[0, \frac{1}{4}\right).$$

Pe de altă parte $C_A(B) = \left[-1, \frac{1}{2}\right)$ şi $F(C_A(B)) = [0, 1]$

$$F(C_A(B)) \not\subset C_{F(A)}(F(B)).$$

Acest lucru se petrece, deoarece aplicaţia F nu este injectivă.

2. Să notăm cu F^{-1} aplicaţia inversă a lui F. Să se arate că

a) $F^{-1}(A \cap B) = F^{-1}(A) \cap F^{-1}(B)$

b) $F^{-1}(A \cup B) = F^{-1}(A) \cup F^{-1}(B)$

c) $F^{-1}(C_A(B)) = C_{F^{-1}(A)} F^{-1}(B), \quad B \subset A.$

R: a) Fie $x \in F^{-1}(A \cap B) \to F(x) \in A \cap B \to F(x) \in A$ şi $F(x) \in B$, deci $x \in F^{-1}(A)$ şi $x \in F^{-1}(B) \to x \in F^{-1}(A) \cap F^{-1}(B)$.

Reciproc fie $x \in F^{-1}(A) \cap F^{-1}(B) \to x \in F^{-1}(A)$ şi $x \in F^{-1}(B) \to F(x) \in A$ şi $F(x) \in B \to F(x) \in A \cap B \to x \in F^{-1}(A \cap B)$

b) $x \in F^{-1}(A \cup B) \to F(x) \in A \cup B \to F(x) \in A$ sau $F(x) \in B \to x \in F^{-1}(A)$ sau $x \in F^{-1}(B) \to x \in F^{-1}(A) \cup F^{-1}(B)$

Reciproc: fie $x \in F^{-1}(A) \cup F^{-1}(B) \to x \in F^{-1}(A)$ sau $x \in F^{-1}(B) \to F(x) \in A$ sau $F(x) \in B \to F(x) \in A \cup B \to x \in F^{-1}(A \cup B)$.

c) $x \in F^{-1}(C_A(B)) \to F(x) \in C_A(B) \to F(x) \in A$ şi $F(x) \notin B \to x \in F^{-1}(A)$ şi $x \notin F^{-1}(B) \to x \in C_{F^{-1}(A)} F^{-1}(B)$

Reciproc: $x \in C_{F^{-1}(A)} F^{-1}(B) \to x \notin F^{-1}(B)$ şi $x \in F^{-1}(A) \to F(x) \notin B$ şi $F(x) \in A \to F(x) \in C_A(B) \to x \in F^{-1}(C_A(B))$.

3. Fie X şi Y spaţii topologice şi f o funcţie definită pe X cu valori în Y. f este continuă pe X dacă şi numai dacă $f^{-1}(V)$ este deschisă în X oricare ar fi V deschisă în Y.

R: O clasă τ de submulţimi ale mulţimii X se numeşte topologie pe X, dacă verifică axiomele:

1) $\Phi, X \in \tau$.

2) Dacă $O_1, O_2 \in \tau$ atunci $O_1 \cap O_2 \in \tau$.

3) Dacă $O_i \in \tau$ pentru orice $i \in I$ (I o familie oarecare de indici), atunci

$$\bigcup_{i \in I} O_i \in \tau.$$

Perechea (X, τ) se numeşte spaţiu topologic.
Mulţimile $O \in \tau$ se numesc mulţimi deschise ale spaţiului (X, τ).

Să presupunem că f este continuă pe X şi V este deschisă în Y.

Arătăm că $f^{-1}(V)$ este deschisă în X.

Pentru $x \in f^{-1}(V)$, ştim că f este continuă în x, astfel că există o vecinătate U_x a lui x, $f(U_x) \subset V$, adică $U_x \subset f^{-1}(V)$. Urmează că $f^{-1}(V) = \bigcup\{U_x;\ x \in f^{-1}(V)\}$ care este o reuniune de mulţimi deschise, astfel $f^{-1}(V)$ este deschisă.

Reciproc: $f^{-1}(V)$ este deschisă în X oricare ar fi V deschisă în Y. Arătăm că f este continuă pe X. Fie $x \in X$ şi V o vecinătate a lui $f(x)$. Atunci $f^{-1}(V)$ este vecinătate a lui x şi fie $f(f^{-1}(V)) \subset V$. Astfel f este continuă în X.

Observaţie. Imaginea unei mulţimi deschise printr-o funcţie continuă nu este totdeauna o mulţime deschisă. Ex.: $f(x) = x^2$, $x \in (-1, 1)$, $f(x) \in [0, 1)$.

4. Fie f o aplicaţie continuă a spaţiului metric X în spaţiul metric Y. Fie E o submulţime închisă din Y. Să se arate că mulţimea $f^{-1}(E)$ este închisă în X.

R. Se numeşte metrică pe mulţimea X o funcţie
$d: X \times X \to R$ care satisface condiţiile

$$d(x, y) \geqslant 0$$

$$d(x, y) = d(y, x), \quad (\forall)\ x, y \in X$$

$$d(x, y) \leqslant d(x, z), \forall\, d(z, y),\ x, y, z \in X.$$

Aplicăm rezultatul problemei precedente.

Dacă E este închisă în Y atunci CE este o mulţime deschisă în Y. Cum f este continuă, $f^{-1}(CE)$ este o mulţime deschisă în X. Dar

$$f^{-1}(C_Y E) = C_X f^{-1}(E)$$

deci $Cf^{-1}(E)$ este o mulţime deschisă în X, de unde $f^{-1}(E)$ este închisă în X.

Deoarece X şi Y sînt spaţii metrice, se poate demonstra şi folosind definiţia cu şiruri.

5. Fie $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in X = [1, 5)$. Fie F o parte închisă a mulţimii X. Este $f(F)$ o mulţime închisă?

R: Deoarece F este o mulţime închisă, avem $F = \bar{F}$. $f(x)$ admite ca inversă pe $f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$, $x \in Y = \left[\frac{1}{5}, 1\right]$. Dar, $f^{-1}(x)$ este continuă în X, deci imaginea inversă a unei mulţimi închise prin f este o mulţime închisă (f este funcţia inversă a lui f^{-1}).

Deci:

$$f^{-1}: Y \to X, \quad F \subset X$$

$$f(F) = \overline{f(F)}$$

prin urmare $f(F)$ este o mulţime închisă.

6. Fie $f : X \to R$ continuă în tot spațiul X.

Să se arate că mulțimea $F_\alpha = \{x, x \in X;\ f(x) = \alpha\}$ este închisă oricare ar fi numărul real α.

R: Putem scrie că $f^{-1}(f(F_\alpha)) = F_\alpha$; dar, $f(F_\alpha)$ este o mulțime închisă, deoarece

$$f(F_\alpha) = \{\alpha\}$$

și, cum f este continuă, imaginea inversă a unei mulțimi închise este o mulțime închisă, deci F_α este închisă.

7. Să se arate că $f(f^{-1}(B) \cap A) = B \cap f(A)$ este adevărată dacă relația f este o funcție.

R: Să încercăm să verificăm egalitatea.

Fie $y \in f(f^{-1}(B) \cap A)$, deci există $x \in f^{-1}(B) \cap A$ astfel ca $y = f(x)$, urmează $x \in f^{-1}(B)$ și $x \in A$, de unde $f_1(x) \in B$ și $f_2(x) \in f(A)$; $f_1(x) = f_2(x)$ deci f este o funcție.

Pentru a demonstra incluziunea în sens invers, fie $y \in B \cap f(A)$, deci $y \in B$ și $y \in f(A)$, prin urmare există $x' \in f^{-1}(B)$ cu $f(x') = y$ și $x'' \in A$ cu $f(x'') = y$. Pentru ca $x' = x''$ trebuie ca f să fie biunivocă.

8. Să se arate că relația $y = \frac{x}{1+x}$ stabilește un homeomorfism f(f este biunivocă și f, f^{-1} sînt continue) între spațiile: $X = (0, \infty)$ și $Y = (0,1)$.

R: f este continuă în X și

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{1-y}$$

este continuă pentru orice $y \in R - \{1\}$, deci și pentru $y \in (0,1)$; f este și biunivocă, ceea ce se vede din expresiile lui f și f^{-1}.

9. O aplicație biunivocă $f : X \to Y$ este un homeomorfism dacă și numai dacă pentru orice mulțime $A \subset X$ avem $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$.

R: f este homeomorfism, deci f este continuă, de unde

$$f(\bar{A}) \leqslant \overline{f(A)};$$

urmează

$$f^{-1}\overline{(f(A))} \leqslant \overline{f^{-1}f(A)} = \bar{A},$$

așa dar

$$\overline{f(A)} \leqslant f(\bar{A})$$

care împreună dau

$$f(\bar{A}) = \overline{f(A)},$$

Reciproc: presupunem că relația are loc pentru orice $A \subset X$; rezultă că $f^{-1}\overline{(f(A))} = \overline{f^{-1}(\overline{f(A)})}$, deci f este continuă, deoarece imaginea inversă a unei mulțimi închise este o mulțime închisă.

10. Se dau funcțiile $f_i(x)$, $g_i(x)$, $i = 1, 2$, $x \in [a, b]$ cu $0 \leqslant g_i(x) \leqslant 1$, $g_1(x) + g_2(x) = 1$, $x \in [a, b]$. Să se arate că funcția

$$F(x) = f_1(x)\, g_1(x) + f_2(x)\, g_2(x), \quad x \in [a, b]$$

are graficul cuprins între graficele funcțiilor $y = f_1(x)$ și $y = f_2(x)$.

Demonstrație. Trebuie să arătăm că nu putem avea decît

$$f_1(x) \leqslant F(x) \leqslant f_2(x),$$

sau

$$f_2(x) \leqslant F(x) \leqslant f_1(x).$$

Pentru punctele în care $f_1(x) \leqslant f_2(x)$, putem scrie

$$F(x) - f_2(x) = f_1(x)\, g_1(x) + f_2(x)\, g_2(x) - f_2(x) =$$

$$= f_1(x)\, g_1(x) - g_1(x)\, f_2(x) = g_1(x)(f_1(x) - f_2(x)) \leqslant 0,$$

deci

$$F_2(x) \leqslant f_2(x).$$

În continuare avem

$$F(x) - f_1(x) = f_1(x)\, g_1(x) + f_2(x)\, g_2(x) - f_1(x) =$$

$$= -f_1(x)\, g_2(x) + g_2(x)\, f_2(x) = g_2(x)\,(f_2(x) - f_1(x)) \geqslant 0,$$

deci

$$F(x) \geqslant f_1(x)$$

sau

$$f_1(x) \leqslant F(x) \leqslant f_2(x).$$

Pentru punctele în care $f_1(x) \geqslant f_2(x)$, în același mod se arată că

$$f_2(x) \leqslant F(x) \leqslant f_1(x).$$

11. Să se calculeze

$$\lim_{x \to \infty} e^{\frac{b}{x}\left[\frac{x}{a}\right]}, \quad b \in R, \quad a \neq 0.$$

R. Pentru $[x]$ partea întreagă a lui $x \in R$ avem

$$x - 1 < [x] \leqslant x$$

deci și

$$\frac{x}{a} - 1 < \left[\frac{x}{a}\right] \leqslant \frac{x}{a}$$

în care dacă înmulțim cu $\frac{b}{x}$, $x > 0$ rezultă

$$\frac{b}{a} - \frac{b}{x} < \frac{b}{x}\left[\frac{x}{a}\right] \leqslant \frac{b}{a}, \quad b > 0,$$

$$\frac{b}{a} - \frac{b}{x} > \frac{b}{x}\left[\frac{x}{a}\right] \geqslant \frac{b}{a}, \quad b < 0,$$

din care obținem imediat

$$\lim_{x \to \infty} e^{\frac{b}{x}\left[\frac{x}{a}\right]} = e^{\frac{b}{a}}$$

pentru $b > 0$ sau $b < 0$. Rezultatul este adevărat și pentru $b = 0$.

12. Dacă

$$f(x) = \lim_{u \to 0} \frac{x^2}{x^2 + u^2}, \quad x \in R$$

să se arate că avem

$$F(x) = \lim_{x \to \infty} f[\sin(n! \, \pi x)] = \begin{cases} 0, & x \text{ rațional} \\ 1, & x \text{ irațional} \end{cases}$$

R: Din definiția lui f rezultă că

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x \neq 0 \end{cases} \tag{1}$$

Fie $x = \frac{p}{q}$, $p, q \in Z$, $q \neq 0$. Pentru $n > q$ avem $\pi \cdot n! \cdot \frac{p}{q} = k\pi$, $k \in Z$. Pentru x irațional pentru orice $n \in N$, $\pi \cdot n! \; x \neq k\pi$, de unde obținem

$$\sin(n! \, \pi x) = \begin{cases} 0, & x \text{ rațional} \\ \lambda \in (-1, 0) \cup (0, +1), & x \text{ irațional.} \end{cases}$$

Acest rezultat condus în (1) duce la afirmația din enunț.

13. Dacă funcția $f(x)$, $x \in (0, 1]$ este mărginită pe $(0, 1]$ atunci funcția

$$g(x) = x^\alpha f(x), \quad x \in (0, 1], \quad \alpha \in R, \quad \alpha > 0$$

are limita la dreapta în punctul $x = 0$.

R: Aplicăm criteriul Cauchy-Bolzano. Fie $M > 0$ astfel încît

$$|f(x)| \leqslant M, \quad x \in (0, 1].$$

Să arătăm că la orice $\varepsilon > 0$ există $\eta(\varepsilon)$ astfel încît

$$|g(x') - g(x'')| < \varepsilon$$

pentru orice $0 < x' < \eta_1(\varepsilon)$, $0 < x'' < \eta_1(\varepsilon)$. Putem scrie

$$|g(x') - g(x'')| = |x'^{\alpha} f(x') - x''^{\alpha} f(x'')| \leqslant$$

$$\leqslant |x'|^{\alpha} |f(x')| + |x''|^{\alpha} |f(x'')| \leqslant M(|x'|^{\alpha} + |x''|^{\alpha}).$$

Dacă luăm pentru $\eta_1(\varepsilon)$ pe

$$\eta_1(\varepsilon) = (2M)^{-\frac{1}{\alpha}} \cdot \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}},$$

pentru $x' > 0$, $x'' > 0$, $x', x'' < \eta_1(\varepsilon)$ rezultă imediat

$$|g(x') - g(x'')| < \varepsilon;$$

deci g are limita la dreapta în punctul $x = 0$. Deoarece f este mărginită şi $\lim\limits_{x \to 0+} x^{\alpha} = 0$ se obţine $g(0 +) = 0$.

14. Să se arate că funcţia

$$f(x) = x + E(x), \quad x \in [0, \infty)$$

se poate inversa şi să i se determine inversa.

R: Din definiţia lui $E(x)$ rezultă:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1) \\ x + 1, & x \in [1, 2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x + n, & x \in [n, n + 1). \end{cases}$$

Funcţia este strict monotonă în intervalele $[n, n + 1)$.
Graficul este dat în figura 4.
Funcţia inversă se obţine rezolvînd ecuaţia

$$y = x + E(x).$$

Pentru $x \in [n, n + 1)$, $y \in [2n, 2n + 1)$

$$x = y - n, \quad y \in [2n, 2n + 1),$$

deci: $f^{-1}(x) = x - n$; $x \in [2n, 2n + 1)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

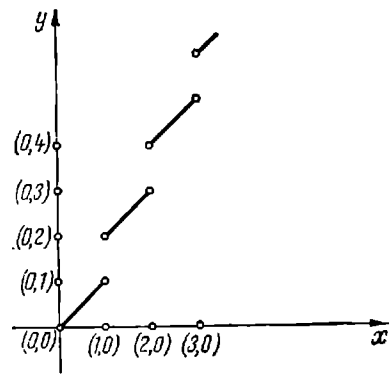

Fig. 4

15. Fie $f(x)$ o funcţie cu valori reale definită pentru $x \in (0, 1)$; dacă

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \text{ şi } \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = 0,$$

atunci $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$.

R: Deoarece $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = 0$, $(\forall)\ \varepsilon > 0$

$(\exists)\ \eta > 0$ astfel ca $\left|f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right)\right| < \varepsilon |x|$ pentru $|x| \leqslant \eta$. De aici rezultă că:

$$\left|f(x) - f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right| \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} \left|f\left(\frac{x}{2^j}\right) - f\left(\frac{x}{2^{j+1}}\right)\right| \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon \frac{\varepsilon |x|}{2^{j+1}} (j+1) < \varepsilon |x|, \quad (\forall),\ n \in N;$$

însă

$$|f(x)| - \left|f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right| \leqslant \left|f(x) - f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right| \leqslant \varepsilon |x|,$$

de unde

$$|f(x)| \leqslant \varepsilon |x| + \left|f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right|$$

însă

$$\frac{x}{2^n} \to 0 \text{ cînd } n \to \infty, \text{ deci } (\forall)\ \varepsilon > 0$$

$(\exists)\ N(\varepsilon)$ astfel că pentru $n > N(\varepsilon)$ și x fix

$$\frac{1}{|x|} \left|f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right| < \varepsilon$$

obținem

$$|f(x)| \leqslant |x|\, \varepsilon + \varepsilon\, |\cdot x|$$

din care rezultă afirmația din enunț.

16. Să se arate că mulțimea valorilor funcției continue

$$f(x) = 1 + \sin x, \quad x \in (0, 2\pi)$$

este un segment.

R: Trebuie să arătăm că $f(x)$ are proprietatea lui Darboux.

Observăm că $M = 2$ și $m = 0$. Fie $y \in [0,2]$.

Ecuația

$1 + \sin x = y$, $\sin x = y - 1$ are totdeauna cel puțin o soluție, deoarece

$$-1 \leqslant y - 1 \leqslant 1, \quad y \in [0,2]$$

17. Fie $f(x)$ o funcție strict crescătoare pe $[a, b] \subset R$ atunci f^{-1} este continuă pe mulțimea ei de definiție.

R: Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar și $\varepsilon' < \varepsilon$ astfel că $\varepsilon' > 0$ și $f(x_0 + \varepsilon')$, $f(x_0 - \varepsilon')$ să fie definite.

Fie $\delta_1 = f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0) > 0$

și

$$\delta_2 = f(x_0) - f(x_0 - \varepsilon) > 0$$

$$\delta = \min(\delta_1, \delta_2).$$

Atunci $|f(x) - f(x_0)| < \delta$ implică $|x - x_0| < \varepsilon'$ deci f^{-1} este continuă în x_0.

18. Se dă funcția

$$f(x) = x + g(x), \quad x \in [-1, +1]$$

care îndeplinește următoarele condiții

a) este continuă pe $[-1, +1]$,

b) $|g(x)| < |x|$ pentru $x = +1$ și $x = -1$.

Să se arate că mulțimea valorilor lui $f(x)$ este o vecinătate a originii.

R: Pentru a arăta că mulțimea valorilor $f(B)$ cu $B = [-1, +1]$ este o vecinătate a originii este suficient să arătăm că există $(-c, c) \subset f(B)$, $c > 0$. Avem

$$f(1) = 1 + g(1) > 0, \quad f(-1) = -1 + g(1) < 0$$

din cauza condiției (b); f fiind continuă și $f(-1)$. $f(+1) < 0$ există $\xi \in (-1, +1)$ cu $f(\xi) = 0$, deci $0 \in f(B)$.

Tot din cauza condiției (b) există $c' > 0$ astfel încît

$$(1) \qquad \begin{cases} [f(x) - c']|_{x=1} = 1 + g(1) - c' > 0 \\ [f(x) - c']|_{x=-1} = -1 + g(-1) - c' < 0, \end{cases}$$

deci există un punct ξ' astfel încît $f(\xi') - c' = 0$. Există de asemenea $c'' > 0$ astfel încît

$$(2) \qquad [f(x) + c'']|_{x=1} > 0, \quad [f(x) + c'']|_{x=-1} < 0$$

deci există $\xi'' \in (-1, +1)$ cu $f(\xi'') = -c''$. Fie $c = \inf [c', c'']$. Pentru orice $\eta \leqslant C$, $\eta \geqslant 0$, neegalitatea (1) și (2) sînt satisfăcute, prin urmare $(-c, c) \in f(B)$. Putem lua

$$c' = \frac{1 + g(1)}{2}, \quad c'' = \frac{1 - g(-1)}{2},$$

deci

$$c = \inf \left(\frac{1 + g(1)}{2}, \quad \frac{1 - g(-1)}{2} \right).$$

19. Să se arate că dacă $f(x)$ este o funcție reală mărginită pe $I = [a, b]$ și $g(x)$ este reală și

1) monoton crescătoare pe I

sau

2) continuă cu $g(b) > g(x)$ pentru $x \in [a, b]$ atunci, dat fiind $\varepsilon > 0$ există o constantă $\lambda(\varepsilon) > 0$, astfel ca $f(x) - \lambda g(x)$ să nu-și poată atinge $\inf_{x \in I} (f(x) - \lambda g(x))$ pe $[a, b - \varepsilon]$.

R: Fie $m(\varepsilon)$ marginea inferioară a funcției $f(x)$ pentru $x \in [a, b - \varepsilon]$ și fie $g(x_0)$ maximul lui $g(x)$ pentru $x \in [a, b - \varepsilon]$. x_0 există dacă g este funcție continuă; pentru cazul în care este monoton crescătoare evident $x_0 = b - \varepsilon$).

Se alege $\lambda(\varepsilon)$ astfel ca:

$$\lambda(\varepsilon) > \max\{[m(\varepsilon) - f(b)] / [g(x_0) - g(b)], 0\}.$$

Deoarece $g(x_0) - g(b) < 0$ şi $f(x) \geqslant m(\varepsilon)$, $g(x) \leqslant g(x_0)$ pentru $x \leqslant b - \varepsilon$ avem:

$$f(x) - \lambda g(x) > f(b) - \lambda g(b), \quad x \geqslant b - \varepsilon$$

de aici, pentru $x \leqslant b - \varepsilon$ urmează că $f(x) - \lambda g(x)$ nu-şi poate atinge marginea inferioară.

20. Să se studieze continuitatea uniformă a funcţiei

$$f(x) = x \sin^2 x^2, \quad x \in R.$$

R: Să considerăm punctele

$$x_n' = \sqrt{(2n + 1)\frac{\pi}{2}} \text{ şi } x_n'' = \sqrt{n\pi}.$$

Obţinem

$$|x_n' - x_n''| = \frac{|x'^2 - x_n''^2|}{|x_n' + x_n''|} = \frac{\pi}{2\left(\sqrt{(2n + 1)\frac{\pi}{2}} + \sqrt{n\pi}\right)}.$$

Această diferenţă poate fi făcută mai mică decît un ε alegînd pe n convenabil.

În acelaşi timp,

$$|f(x_n') - f(x_n'')| = \sqrt{(2n + 1)\frac{\pi}{2}} \to \infty.$$

Aceasta arată că $f(x)$ nu este uniform continuă pe R.

Observaţie. Funcţia $g(x) = x \cos^2 x^2$, $x \in R$ nu este nici ea uniform continuă, dar:

$$f(x) + g(x) = x, \quad x \in R$$

este o funcţie uniform continuă. Deci suma a 2 funcţii poate fi o funcţie uniform continuă fără ca cele 2 funcţii să fie uniform continue.

21. Folosind definiţia continuităţii uniforme să se arate că funcţia $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2}$ este uniform continuă pe $[1, \infty)$.

R. Trebuie arătat că $(\forall)\ \varepsilon < 0$ există $\gamma(\varepsilon)$ astfel că pentru orice x' şi $x'' \in [1, \infty)$, $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ | dar

$$f(x') - f(x'') = \frac{x'}{x'^2 + 2} - \frac{x''}{x''^2 + 2} = \frac{x'x''(x'' - x') + 2(x' - x'')}{(x'^2 + 2)(x''^2 + 2)}$$

$$f(x') - f(x'') = \frac{(x'' - x')(x'x'' - 2)}{(x'^2 + 2)(x''^2 + 2)} = \frac{(x'' - x')\left(1 - \frac{2}{x'x''}\right)}{\left(x' + \frac{2}{x'}\right)\left(x'' + \frac{2}{x''}\right)};$$

deoarece $x' > 1$ și $x'' > 1$, $\frac{1}{x'} < 1$, $\frac{1}{x''} < 1$ urmează că

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{|x'' - x'| \, 3}{|x'x''|} = 3\,|x'' - x'| < \varepsilon; \quad |x'' - x'| < \frac{\varepsilon}{3},$$

deci f este uniform continuă cu $\eta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{3}$.

22. Să se arate că funcția lui Riemann

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} \text{ dacă } x \text{ este rațional, } x = \frac{m}{n}, \\ 0 \text{ dacă } x \text{ este irațional,} \end{cases}$$

este continuă în orice punct irațional.

R: Fie $(x_n)_{n \in N}$ un șir de numere iraționale care tinde către un număr irațional x_0; de exemplu

$$x_n = \frac{nx_0}{\sqrt{n^2 + 1}}; \quad f(x_n) = 0 \to 0.$$

Pentru un șir $(x_n')_{n \in N}$ de numere raționale care tinde către același număr irațional x_0,

$$f(x_n') = \frac{1}{n} \quad \text{și} \quad \lim_{n \to \infty} f(x_n') = 0.$$

Deci funcția este continuă în orice punct x_0 irațional.

Dacă y_0 este un număr rațional, fie $(y_n)_{n \in N}$ un șir de numere raționale care tinde la y_0, $f(y_n) = \frac{1}{q(n+1)}$, dacă de exemplu, $y_n = \frac{ny_0}{n+1}$, $y_0 = \frac{p}{q}$;

$$\lim_{n \to \infty} f(y_n) = 0; \text{ pentru } y_n = \frac{p}{q}, \; f(y_n) = \frac{1}{q} \to \frac{1}{q}.$$

Dacă y_n este un șir de numere iraționale ce tinde către numărul rațional $y_0 = \frac{p}{q}$, atunci $f(y_n) = 0$; dar $f(y_0) = \frac{1}{q}$, $y_0 = \frac{p}{q}$, deci $f(y_0) \neq \lim_{n \to \infty} f(y_n)$.

23. Fie f o funcție reală definită pe (a, b). Să se arate că mulțimea punctelor de discontinuitate este cel mult numărabilă.

R: Fie E mulțimea punctelor pentru ca $f(x - 0) < f(x + 0)$.

Fiecărui punct x din mulțimea E îi asociem tripletul (p, q, r) de numere raționale pentru care

a) $f(x - 0) < p < f(x + 0)$;

b) pentru $a < q < t$ [illegible] avem $f(t) < p$;

c) pentru $x < t < r < b$ avem $f(t) < p$.

Mulțimea tuturor acestor triplete este o mulțime numărabilă, deoarece o reuniune finită de mulțimi numărabile este o mulțime numărabilă.

Fiecare asemenea triplet caracterizează un singur punct din mulțimea E.

24. Să se arate că

$$\rho(f, g) = \int_I \frac{|f(t) - g(t)|}{1 + |f(t) - g(t)|}\, dt$$

este o metrică în spațiul $C(I)$ a funcțiilor continue definite în $I \subset R$, cu I un compact în R.

R: Primele 2 proprietăți se demonstrează imediat. Pentru inegalitatea triunghiului folosim inegalitatea:

$$\frac{|a + b|}{1 + |a + b|} \leqslant \frac{|a|}{1 + |a|} + \frac{|b|}{1 + |b|}.$$

Dacă $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ (sau $a \leqslant 0$, $b \leqslant 0$);

$$\frac{a + b}{1 + a + b} = \frac{a}{1 + a + b} + \frac{b}{1 + a + b} \leqslant \frac{a}{1 + a} + \frac{b}{1 + b}.$$

Pentru cazul cînd $a \cdot b \leqslant 0$, să presupunem că $|b| \leqslant |a|$. Atunci $|a + b| \leqslant |a|$.

Observăm că funcția $f(x) = \frac{x}{1 + x}$ este crescătoare, deoarece derivata ei $f'(x) = \frac{1}{(1 + x)^2} \geqslant 0$, deci

$$f(|a + b|) \leqslant f(|a|)$$

sau:

$$\frac{|a + b|}{1 + |a + b|} \leqslant \frac{|a|}{1 + |a|} \leqslant \frac{|a|}{1 + |a|} + \frac{|b|}{1 + |b|}.$$

Luînd acum $a = f(t) - g(t)$, $b = g(t) - h(t)$, obținem inegalitatea

$$\rho(f, g) \leqslant \rho(f, h) + \rho(h, g).$$

25. Fie A o mulțime oarecare din R și $M(A)$ mulțimea tuturor funcțiilor reale definite pe A cu metrica

$$d(f, g) = \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)|.$$

Să se arate că $M(A)$ este un spațiu metric.

R: a) $d(f, g) \geqslant 0$

$d(f, g) = 0$ dacă $\sup_{x \in A} |f(x) - g(x)| = 0$.

Aceasta înseamnă că $f(x) = g(x)$ pentru orice $x \in A$; deci cele 2 funcții sînt identice.

b) $d(f, g) = d(g, f)$.

c) Pentru a arăta că $d(f, g) \leqslant d(f, h) + d(h, g)$, trebuie să demonstrăm că

$$\sup_{x \in A} |f(x) - g(x)| \leqslant \sup_{x \in A} |f(x) - h(x)| + \sup_{x \in A} |h(x) - g(x)|.$$

dar

$$|f(x) - g(x)| = |(f(x) - h(x)) + (h(x) - g(x))| \leqslant$$
$$\leqslant |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{x \in A} |f(x) - h(x)| + \sup_{x \in A} |h(x) - g(x)|,$$

de unde rezultă că și

$$\sup_{x \in A} |f(x) - h(x)| \leqslant \sup_{x \in A} |f(x) - h(x)| + \sup_{x \in A} |h(x) - g(x)|.$$

26. Fie $x_n = \frac{10n}{n+1}$ termenul general al unui șir numeric convergent către 10.

Fie

$$f(x) = \sum_{x_n < x} \frac{1}{2^n}, \quad x \in R^+.$$

Să se arate că

1) $f(x)$ este o funcție strict crescătoare,

2) $f(x)$ este continuă la stînga,

3) este discontinuă în orice punct cu abscisă rațională și continuă în toate celelalte puncte,

4) $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

R: 1) Fie $0 < x' < x''$, $f(x') = \sum_{x_n < x'} \frac{1}{2^n}$ și $f(x'') = \sum_{x_n < x''} \frac{1}{2^n}$;

$x_n < x'$ înseamnă $\frac{10n'}{n'+1} < x'$ sau $n'(10 - x') < x'$ și $x_n < x''$ înseamnă $n''(10 - x'') < x'$.

Deoarece $10 - x' > 10 - x''$, avem șirul de inegalități;

$$n'(10 - x'') < n'(10 - x') < x' < x''$$

amplificînd cu n'', avem

$$n''n'(10 - x'') > n''x'',$$

de unde $n' < n''$.

Deoarece $n'' > n'$ înseamnă că pentru $f(x'')$ se însumează un număr mai mare de termeni pozitivi.

Funcţia $f(x)$ se poate scrie sub forma

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x_1 \leqslant 5 \\ \frac{1}{2}, & x_1 < x \leqslant x_2 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}, & x_2 < x \leqslant x_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}, & x_n < x \leqslant x_{n+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

2) Se observă că

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \sum_{x_n < x_0} \frac{1}{2^n} = f(x_0).$$

3) Funcţia $f(x)$ este discontinuă în punctele $x = x_n$, deoarece

$$\lim_{\substack{x \to x_n \\ x \leqslant x_n}} f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\lim_{\substack{x \to x_n \\ x > x_n}} f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n};$$

4) $$\lim_{x \to \infty} f(x) = \sum_{x_n < \infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = 1$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \sum_{x_n < 0} \frac{1}{2^n} = 0.$$

627. Dacă $f(x)$ este o funcţie continuă pe $[a, b]$ şi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt n valori din acest interval există un punct $\xi \in (a, b)$ cu

$$f(\xi) = \frac{1}{n}(f(x_1) + \ldots + f(x_n)).$$

R: Deoarece $f(x)$ este o funcţie continuă pe $[a, b]$, ea este mărginită şi există 2 puncte ξ_1, ξ_2 în $[a, b]$ în care

$$f(\xi_1) = m, \quad f(\xi_2) = M,$$

m şi M fiind marginile inferioară şi superioară ale funcţiei f pe $[a, b]$.

Deci $m < f(x) < M$ pentru orice $x \in [a, b]$, $x \neq \xi_1, \xi_2$.

Putem scrie că

$$nm < f(x_1) + \ldots + f(x_n) < nM$$

sau încă

$$m < \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n} < M;$$

în baza proprietății lui Darboux pe care o posedă funcțiile continue există un punct $\xi \in (a, b)$ cu

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n}.$$

28. Se spune că funcția f definită pe intervalul I este convexă (concavă) pe I dacă pentru orice pereche de puncte A, B de pe graficul lui f de abscise $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, graficul funcției f pe $[x_1, x_2]$ este sub (deasupra) segmentului AB. Să se arate că f este convexă pe I dacă pentru orice $x_1 < x_2$ și orice $t \in [0,1]$ avem

$$(\alpha) \qquad f[tx_1 + (1-t)\,x_2] \leqslant tf(x_1) + (1-t)\,f(x_2).$$

R: Un punct $\xi \in [x_1, x_2]$ se poate scrie astfel

$$\xi = tx_1 + (1-t)\,x_2, \qquad t \in [0, 1]$$

ordonata punctului de abscisă ξ situat pe AB este

$$y(\xi) = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\,(\xi - x_1)$$

sau

$$y(\xi) = tf(x_1) + (1-t)\,f(x_2)$$

prin urmare relația (α) spune că dacă intersectăm cu dreapta $x = \xi$ graficul funcției f și segmentul AB ordonata punctului de intersecție cu graficul funcției f este mai mică sau cel mult egală cu ordonata punctului de intersecție cu segmentul AB. Dacă

$$f(tx_1 + (1-t)\,x_2) \geqslant tf(x_1) + (1-t)\,f(x_2),$$

atunci f este concavă pe I. Se demonstrează în același mod.

29. Funcția f: $I \to R$ este convexă în I dacă pentru orice sistem de puncte $x, y \in I$ și orice număr $\lambda \in [0, 1]$

$$f(\lambda x + (1-\lambda)\,y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)\,f(y).$$

Pentru $\lambda = \frac{1}{2}$ se obține următoarea definiție:

Funcția $f : I \to R$ este convexă Jensen dacă pentru orice pereche de puncte $x, y \in I$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Să se arate că dacă numerele $x_1, x_2, \ldots, x_m$ aparțin lui I și f este o funcție convexă Jensen, atunci

$$f\left(\frac{\sum x_i}{m}\right) \leqslant \frac{1}{m}\sum_1^m f(x_i).$$

R: Dacă numerele $x_1, x_2, ..., x_m, ...$ aparţin intervalului (a, b), atunci din definiţia funcţiei convexe Jensen

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}\right) \leqslant \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + f\left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right)\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4}[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)]$$

şi în general

$$f\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} x_i\right) \leqslant \frac{1}{2^p}\sum_{i=1}^{2^p} f(x_i),$$

relaţie ce se obţine prin recurenţă.

Dacă în această inegalitate alegem:

$$x_{m+1} = x_{m+2} = ... + x_{2^p} = \frac{1}{m}(x_1 + x_2 + ... + x_m)$$

se obţine:

$$f\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i\right) \leqslant \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} f(x_i).$$

30. Fie f o funcţie definită pe $(0, \infty)$ care satisface condiţiile

a) $f(x, y) = f(x) + f(y)$;

b) $f(a) = 1, \quad a \in R, \quad a > 1$, fix;

c) dacă $y > x, \quad f(x) > f(x)$

să se demonstreze existenţa şi unicitatea acestei funcţii.

R: Pentru $x = y$ rezultă

$$f(x^2) = 2f(x)$$

şi prin recurenţă $f(x^n) = nf(x)$. Pentru $x = a$, obţinem

$$f(a^n) = nf(a) = n$$

cît şi $f(1) = nf(1)$, deci $f(1) = 0$. Pentru orice $x \in R$ şi $n \in N$ există $m \in N$ astfel încît

$$a^m \leqslant x^n < a^{m+1}$$

şi, pentru că f este crescătoare, urmează

$$f(a^m) \leqslant f(x^n) < f(a^{m+1})$$

sau, ţinînd seamă de cele obţinute mai sus,

$$\frac{m}{n} \leqslant f(x) < \frac{m+1}{n},$$

deci numărul $f(x)$ este comun tuturor intervalelor $\left[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}\right]$. Pentru $n > \frac{1}{\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, măsura intervalului $\left[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}\right]$ este mai mică decît ε. Dacă luăm

$$n_1 = 1, \quad n_2 = 2, \quad n_3 = 2^2, \ldots, n_h = n^{h-1}$$

observăm că avem incluziunea

$$\left[\frac{m_h}{n_h}, \frac{m_h + 1}{n_h}\right] \supset \left[\frac{m_{h+1}}{n_{h+1}}, \frac{m_{h+1} + 1}{n_{h+1}}\right],$$

deoarece din

$$a^{m_h} \leqslant x^{n_h+1} < a^{m_h+1}$$

urmează

$$a^{2m_h} \leqslant x^{2n_h} = x^{n_{h+1}} < a^{2(m_h+1)},$$

deci

$$m_{h+1} \geqslant 2m_h, \quad m_{h+1} + 1 \leqslant 2(m_h + 1)$$

de unde rezultă

$$\frac{m_h}{n_h} = \frac{2m_h}{n_h} \leqslant \frac{m_{h+1}}{n_{h+1}} < \frac{m_{h+1} + 1}{n_{h+1}} \leqslant \frac{2(m_h + 1)}{2n_h} = \frac{m_h + 1}{n_h}$$

deci intersecția tuturor acestor intervale este punctul $f(x)$; $f(x)$ există și este unic. Aplicația $x \to f(x)$ definește funcția f. Fie x, y în $(0, \infty)$ și m_h, p_h,

$$a^{m_h} \leqslant x^{n_h} < a^{m_h+1}, \quad a^{p_h} \leqslant y^{n_h} < a^{p_h+1}$$

astfel încît

$$(\alpha) \qquad \frac{m_h}{n_h} \leqslant f(x) < \frac{m_h + 1}{n_h}, \quad \frac{p_h}{n_h} < f(y) < \frac{p_h + 1}{n_h},$$

de unde avem

$$a^{(m_h+p_h)} \leqslant (xy)^{n_h} < a^{(m_h+p_h+2)}$$

sau

$$\frac{m_h + p_h}{n_h} \leqslant f(xy) < \frac{m_h + p_h + 2}{n_h},$$

dar din (α) obținem prin adunare și

$$\frac{m_h + p_h}{n_h} \leqslant f(x) + f(y) < \frac{m_h + p_h + 2}{n_h};$$

deci

$$|f(xy) - f(x) - f(y)| < \frac{2}{n_h}$$

de unde rezultă că proprietatea (a) este verificată. Proprietățile (b) și (c) se deduc în mod asemănător.

31. Se dă funcția $f : [a, b] \to R$ care are proprietatea lui Darboux. Dacă m, M sînt marginile inferioară și superioară ale lui f și dacă f^{-1} există pe $[m, M]$, atunci f este strict monotonă și continuă pe $[a, b]$.

R: Să observăm că pentru $x', x \in [a, b]$ $x' \neq x$ avem $f(x') \neq f(x)$ altfel f^{-1} nu ar fi definită pentru $x' = x$. Aceeași neegalitate arată că f nu este constantă pe subintervale din $[a, b]$, iar dacă este monotonă existența lui f^{-1} spune că este strict monotonă. Fie $\alpha \in (a, b)$ și $\beta \in (a, b)$, $\alpha < \beta$. Să arătăm că dacă $f(a) < f(b)$ atunci

$$f(a) < f(\alpha) < f(b) \quad \text{și} \quad f(\alpha) < f(\beta).$$

Conform enunțului, f trece prin toate valorile cuprinse între $f(a)$ și $f(b)$, o singură dată; dacă $f(\alpha) < f(a)$, atunci ar exista un punct $\gamma \in (a, b)$ în care funcția ar luat valoarea $f(a)$, ceea ce nu se poate; prin urmare trebuie să avem $f(\alpha) > f(a)$. În același mod se arată că $f(b) < f(\beta)$ și $f(\alpha) < f(\beta)$ deci, f este strict crescătoare pe $[a, b]$.

Să presupunem acum că f nu este continuă în punctul $x_0 \in (a, b)$ și $f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0)$, deci f^{-1} nu este definită pe intervalul $(f(x_0 - 0), f(x_0 + 0))$, ceea ce este în contradicție cu enunțul. Urmează $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$.

32. Se dă funcția

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1],\ x \text{ rațional} \\ 1 - x, & x \in (0,1),\ x \text{ irațional.} \end{cases}$$

Să se arate că f are proprietatea lui Darboux în $[a, b]$ este discontinuă pentru $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ și este continuă în punctul $x = \frac{1}{2}$.

R: Pentru $x \in [0,1]$ și rațional, $f(x)$ este rațional și strict crescător cu valori în $[0,1]$, pentru $x \in (0,1)$ și irațional $f(x)$ este irațional, strict descrescător, cu valori în $(0,1)$; deoarece mulțimea valorilor este intervalul $[0,1]$, rezultă că f are proprietatea lui Darboux.

Fie $x_0 \in [0,1]$, $x_0 \neq \frac{1}{2}$. Fie $(\alpha_n)_{n \in N}$ un șir de numere raționale, $\alpha_n \in [0,1]$, $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n = x_0$ și $(\beta_n)_{n \in N}$ un șir de numere iraționale cu $\lim\limits_{n \to \infty} \beta_n = x_0$. Avem succesiv

$$f(\alpha_n) = \alpha_n \to x_0, \quad f(\beta_n) = 1 - \beta_n \to 1 - x_0$$

deci pentru orice $x_0 \in [0,1]$, $x_0 \neq \frac{1}{2}$, f nu este continuă. Pentru $x_0 = \frac{1}{2}$ însă $\lim\limits_{n \to \infty} f(\alpha_n) = \lim\limits_{n \to \infty} f(\beta_n) = \frac{1}{2} = f\left(\frac{1}{2}\right)$, deci în punctul $x_0 = \frac{1}{2}$, este continuă.

33. Fie f o funcție definită pe un interval I cu valori în R.
Să se arate că f este convexă pe I dacă și numai dacă

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \\ 1 & x_3 & f(x_3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix}} \geqslant 0$$

oricare ar fi punctele x_1, x_2, x_3 din I.

R. Deoarece raportul din enunț rămîne neschimbat la o permutare a punctelor x_1, x_2, x_3 rămîne să considerăm numai cazul $x_1 < x_2 < x_3$. În această situație însă

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) > 0$$

deci rămîne să ne ocupăm numai de numărător și anume să arătăm că

$$D = 1 \begin{vmatrix} 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \\ 1 & x_3 & f(x_3) \end{vmatrix} \geqslant 0$$

dacă și numai dacă f este convexă pe I. Putem scrie cu $t \in [0,1]$

$$x_2 = tx_1 + (1 - t)\, x_3;$$

prin urmare

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & tx_1 + (1 - t)\, x_3 & f(tx_1 + (1 - t)\, x_3) \\ 1 & x_3 & f(x_3) \end{vmatrix}$$

dacă înmulțim prima linie cu t, ultima cu $(1 - t)$ și le scădem din a doua obținem

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & f(x_1) \\ 0 & 0 & A \\ 1 & x_3 & f(x_3) \end{vmatrix} = A(x_1 - x_3)$$

cu

$$A = f(tx_1 + (1 - t)\, x_3) - tf(x_1) - (1 - t)\, f(x_3)$$

deci $D \leqslant 0$, deoarece $x_1 - x_3 < 0$, dacă $A \leqslant 0$ sau

$$(\alpha) \qquad f(tx_1 + (1-t)\,x_3) \leqslant tf(x_1) + (1-t)\,f(x_3)$$

prin urmare f este convexă pe I (exercițiul nr. 31).

Reciproc, dacă neegalitatea (α) este satisfăcută rezultă $D \geqslant 0$, deci raportul din enunț este pozitiv.

34. Fie f o funcție definită pe un interval $\mathcal{J}$; să se arate că:

a) f este convexă pe $\mathcal{J}$ dacă și numai dacă

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

unde $x_1 < x < x_2$ sînt puncte din $\mathcal{J}$;

b) f este convexă pe $\mathcal{J}$ dacă și numai dacă

$$p(x, x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

este monoton crescătoare oricare ar fi $x \neq x_0$ din $\mathcal{J}$

R: a) Putem scrie

$$(\alpha) \qquad \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} - \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = \frac{-1}{(x_2 - x)(x - x_1)} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x & f(x) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \end{vmatrix} \geqslant 0$$

și se aplică rezultatul de la problema numărul 33. Reciproca se obține imediat.

b) Fie $x_1 < x_2$ două puncte din $\mathcal{J}$ și

$$(\beta) \qquad \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$$

cu $x_1 < x < x_2$ și se continuă ca la (a). Alte cazuri $x_1 < x_2 < x_0$. Se discută în același mod. Reciproc; să presupunem $x_1 < x_0 < x_2$ și f convexă; din (α) rezultă (β); deci $p(x, x_0)$ este monoton crescătoare.

35. Fie f o funcție convexă pe un interval (a, b). Să se arate că:

a) este mărginită inferior pe (a, b);

b) este continuă pe (a, b).

R. Să presupunem că f nu este inferior mărginită. Atunci există un punct $c \in [a, b]$ astfel încît $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$.

Fie $x_1, x_2 \in (a, b)$ astfel încît c să fie exterior segmentului $[x_1, x_2]$. Există o vecinătate V a lui c astfel încît pentru orice $x_0 \in V$, $f(x_0)$ să fie sub dreapta care unește punctele de pe graficul lui f de abscise x_1 și x_2. Rezultă de aici că

$$\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} > \frac{f(x_0) - f(x_2)}{x_0 - x_2}$$

care este în contradicție cu convexitatea (problema nr. 33) deci ipoteza făcută nu este adevărată și funcția este mărginită inferior.

b) Pentru $x_0 \in (a, b)$ funcția de $x < x_0$

$$p(x, x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

este monoton crescătoare (problema număr 33) deci $p(x_0 - 0, x_0)$ există. La $\varepsilon > 0$, există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încît

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - p(x_0 - 0, x_0) \right| < \varepsilon$$

pentru orice $x \in (x_0 - \delta, x_0)$; rezultă

$$|x - x_0| \cdot |p(x_0 - 0, x_0)| - \varepsilon |x - x_0| < f(x) - f(x_0) <$$
$$< |x - x_0| |p(x_0 - 0, x_0) + \varepsilon |x - x_0|$$

de unde deducem continuitatea la stînga a lui f. Existența lui $p(x_0 + 0, x_0)$, duce în mod asemănător și la continuitatea la dreapta a funcției f în punctul x_0 și cum punctul x_0 este arbitrar în (a, b) rezultă continuitatea lui f în (a, b).

36. Fie f o soluție a ecuației funcționale

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

să se arate că:

a) dacă este continuă în punctul x_0, atunci este continuă în R;

b) dacă este mărginită într-o vecinătate a originei, atunci este continuă pe R.

R. a) Putem scrie

$$\lim_{x \to x_0} f(x - x_0) = \lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)]$$

însă f este continuă în punctul x_0, deci

$$\lim_{x \to x_0} f(x - x_0) = \lim_{\xi \to 0} f(\xi) = 0$$

și conform rezultatului de la exercițiul 36 este continuă și în origine. Fie $z \in R$, avem

$$f(x) = f(x - z) + f(z)$$

de unde rezultă imediat

$$\lim_{x \to z} f(x) = f(z)$$

b) Să presupunem $|f(x)| < M$, $x \in (-|\alpha|, |\alpha|)$.
Putem scrie

$$\left| f\left(\frac{x}{n}\right) \right| = \left| \frac{1}{n} f(x) \right|,$$

deci

$$\lim_{n \to \infty} f\left(\frac{x}{n}\right) = f(x) \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0 = f(0)$$

prin urmare f este continuă în origine. Conform lui (a) este continuă pe R.

37. Dacă f: $(0, \infty) \to R$ este continuă şi convexă pe $(0, \infty)$ şi $f(x + y) \leqslant$ $\leqslant f(x) + f(y)$ pentru orice $x > 0$, $y > 0$, atunci $\frac{f(x)}{x}$ este descrescătoare pe $(0, \infty)$.

R: Deoarece f este convexă avem

$$f(\alpha x + (1 - \alpha) y) \leqslant \alpha f(x) + (1 - \alpha) f(y), \quad \alpha \in (0, 1);$$

fie

$$\alpha = \frac{x}{x + h}, \quad y = 2x + h, \quad h > 0;$$

obţinem

$$f(x + h) \leqslant \frac{x}{x + h} f(x) + \frac{h}{x + h} f(2x + h) \leqslant \frac{x}{x + h} f(x) + \frac{h}{x + h}[f(x) + f(x + h)],$$

de unde:

$$f(x + h) - f(x) \leqslant \frac{h}{x + h} f(x + h)$$

sau

$$\frac{f(x + h)}{x + h} \leqslant \frac{f(x)}{x}.$$

38. Fie X un spaţiu metric complet şi f o funcţie din X în X astfel că pentru $c \in (0, 1)$

$$d(f(x), \quad f(y) \leqslant c d(x, y)$$

pentru orice $x, y \in X$. Să se arate că există un punct $x_0 \in X$ astfel ca $f(x_0) = x_0$.

R: Un spaţiu metric în care orice şir Cauchy este convergent este complet. Fie $x \in X$ şi să considerăm şirul:

$$x, \ f(x), \ f(f(x)), \ ..., \ \underbrace{f(f \ ... \ (f(x)))}_{n \text{ ori}} \ ...$$

Vom nota $f_n(x) = \underbrace{f_0 \cdots_0 f(x)}_{n \text{ ori}}$

Cu ajutorul acestuia să construim şirul numeric

$$u_n = d(f_n(x), \ f_{n-1}(x)).$$

Din ipoteză rezultă că:

$$u_n = d(f_n(x), f_{n-1}(x)) \leqslant c d(f_{n-1}(x), f_{n-2}(x)) = c u_{n-1} < u_{n-1}$$

şi deci şirul $(u_n)_{n \in N}$ este un şir monoton descrescător şi deci convergent.

Fie u limita sa; aceasta poate fi pozitivă sau nulă, deoarece este limita unui şir de numere pozitive.

Arătăm că u este zero, ceea ce rezultă din şirul de inegalităţi:

$$u \leqslant cu < u$$

obţinute trecînd la limită în relaţia

$$u \leqslant u_n = cu_{n-1} < u_{n-1}$$

deci

$$u = 0.$$

Să arătăm că şirul
x, $f(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$, ... este un şir Cauchy pentru orice x fix.
Demonstrăm prin reducere la absurd.
Presupunem că $(\exists)\ \varepsilon > 0$ şi $m, n > N$ astfel ca:

$$d(f_m(x), f_n(x)) \geqslant \varepsilon, \quad (\forall)\ N = 1, 2, 3, ...$$

Dacă m este cel mai mic număr mai mare ca n pentru care are loc $d(f_m, f_n) \geqslant \varepsilon$, ţinînd seama de definiţia numerelor u_n, putem presupune că:

$$d(f_{m-1}(x), f_n(x)) < \varepsilon$$

şi că:

$$d(f_m, f_n) \leqslant d(f_m, f_{m-1}) + d(f_{m-1}, f_n) \leqslant u_m + \varepsilon \leqslant u_N + \varepsilon,$$

deci

$$\lim d(f_m, f_n) = \varepsilon \text{ pentru } m > n \text{ arbitrar},$$

dar:

$$d(f_m, f_n) \leqslant d(f_m, f_{m+1}) + d(f_{m+1}, f_{n+1}) + d(f_{n+1}, f_n) \leqslant 2u_N + c(d(f_m, f_n))$$

şi pentru $N \to \infty$ rezultă

$$\varepsilon \leqslant c\varepsilon < \varepsilon$$

ceea ce nu se poate. Cum spaţiul metric X este complet, există un punct $x_0 \in X$ astfel ca:
şirul u_n , $u_n \leqslant cu_{n-1}$ să tindă la 0, de unde urmează

$$0 = u = d(f(x_0), x_0).$$

39. Să se arate că există o funcţie reală f, definită pe $(0,\infty)$ continuă într-un număr infinit de puncte şi are proprietarea că pentru fiecare x, $f(x) = 0$ dacă şi numai dacă $f(2x) \neq 0$.

R. O funcţie care îndeplineşte condiţiile cerute este dată de:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad 2^{2k} < x \leqslant 2^{2k+1} \\ 1 & , \quad 2^{2k-1} < x \leqslant 2^{2k} \end{cases}$$

$k = \pm 1, \ \pm 2, ...$

40. Să se găsească funcţiile f şi z dacă $z = x^2$ pentru $y = 0$ şi

$$z(x, y) = x + y + f(x - y).$$

R: Pentru $y = 0$, $z = x + f(x) = x^2$, deci $f(x) = x^2 - x$; urmează

$$f(x - y) = (x - y)^2 - (x - y) \quad \text{şi} \quad z = 2y + (x - y)^2.$$

41. Să se găsească o funcţie $f(x)$ astfel ca:

$$f(2x) = e^{x^2} f(x) \cos x, \quad \text{cu} \quad f(0) = 1.$$

R: Din $f(2x) = e^{x^2} f(x) \cos x$ rezultă

$$f\left(\frac{x}{2^k}\right) = e^{\frac{x^2}{4^{k+1}}} f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) \cos\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right).$$

Astfel, dacă presupunem că $f(x)$ este analitică obţinem:

$$f(x) = \prod_{k=0}^{\infty} \left[f\left(\frac{x}{2^k}\right) : f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) \right] = e^{\frac{x^2}{3}} g(x),$$

unde $g(x)$ are proprietatea că $g(2x) = g(x) \cos x$ şi este analitică.

Exprimînd fiecare membru a acestei ultime ecuaţii în serii Mac-Laurin şi egalînd coeficienţii, găsim că $g(x)$ are dezvoltarea în serie a lui $\frac{\sin x}{x}$. Obţinem că funcţia

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{x^2}{3}} \cdot \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

satisface condiţiile problemei.

42. Să se arate că soluţiile continue ale ecuaţiei funcţionale

$$(\alpha) \qquad f(x + y) = f(x) + f(y)$$

au proprietăţile

a) $f(0) = 0$;

b) $f(px) = pf(x), \quad p \in Q$;

c) $f\left(\frac{x + y}{m}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{m}, \quad m \in N$;

d) singurele soluţii continue sînt de forma $f(x) = \lambda x$, $\lambda \in R$.

R: a) Dacă în ecuaţia dată punem $x = 0$, $y = 0$, obţinem

$$f(0) = 2f(0), \quad \text{deci} \quad f(0) = 0;$$

b) dacă luăm $x = y$ rezultă

$$f(2x) = 2f(x)$$

prin recurență ne dă

$$f(mx) = f((m-1)x + x) = (m-1)f(x) + f(x) = mf(x)$$

deci pentru $m \in N$ relația (b) este adevărată. Avem și

$$f(0) = f(x - x) = f(x) + f(-x) = 0$$

deci $f(-x) = -f(x)$, de unde rezultă că pentru $m \in Z$ (b) este satisfăcut. Fie $p = \frac{m}{n} \in Q$ avem

$$f(px) = f\left(\frac{m}{n}x\right) = mf\left(\frac{x}{n}\right)$$

însă

$$f(x) = f\left(\frac{n}{n}x\right) = nf\left(\frac{x}{n}\right), \text{ deci } f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n}f(x);$$

încît obținem

$$f(px) = \frac{m}{n}f(x) = pf(x)$$

c) $f\left(\frac{x+y}{m}\right) = f\left(\frac{x}{m} + \frac{y}{m}\right) = f\left(\frac{x}{m}\right) + f\left(\frac{y}{m}\right) = \frac{1}{m}(f(x) + f(y));$

d) Pentru x rațional rezultă din (b). Fie x irațional și $(x_n)_{n \in N}$ un șir de numere raționale convergent către x.
Avem cu $f(1) = \lambda$

$$f(x_n) = x_n f(1) = \lambda x_n$$

și pentru că f este continuă în x rezultă

$$\lim_{x_n \to x} f(x_n) = \lambda \lim_{x_n \to x} x_n = \lambda x.$$

Ecuația funcțională din enunț se numește și ecuația lui Cauchy.

43. Să se determine toate funcțiile continue reale f care verifică relația:

$$f\left(\frac{x+y}{x-y}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{f(x) - f(y)}, \quad x \neq y$$

și $f(0) = 0$.

R: Pentru $y = 0$, $f(1)(f(x) - f(0)) = f(x) + f(0)$.
Din această relația rezultă $f(1) = 1$.
Înlocuind y prin $x - 2$, apoi x prin $x - 1$ și y prin 1 obținem

$$f(x-1) = \frac{f(x) + f(x-2)}{f(x) - f(x-2)},$$

$$f\left(\frac{x}{x-2}\right) = \frac{f(x-1)+1}{f(x-1)-1},$$

de unde

$$f\left(\frac{x}{x-2}\right)=\frac{f(x)}{f(x-2)}.$$

Pentru $x=4$ avem: $f^2(2)=2f(2)$. Dar, $f(2)\neq 0$ pentru că dacă $f(2)=0$ aceasta ar implica:

$$f\left(\frac{x+2}{x-2}\right)=\frac{f(x)}{f(x)}=1.$$

De aici rezultă că $f(2)=2$.

Să presupunem că $f(x)=x$ pentru $x=0,1,2,\ldots,n$, $(n\geqslant 2)$. Cu $x=n+1$ ecuația

$$f(x-1)=\frac{f(x)+f(x-2)}{f(x)-f(x-2)}$$

dă $f(n+1)=n+1$. Urmează că $f(x)=x$ pentru toți întregii nenegativi.

Punînd $y=cx$ obținem

$$f\left(\frac{1+c}{1-c}\right)=\frac{f(x)+f(cx)}{f(x)-f(cx)}=\frac{1+f(c)}{1-f(c)},$$

de unde $f(cx)=f(c)\,f(x)$.

Fie $x=\frac{p}{q}$ un număr rațional și $c=q$. Atunci $f(p)=f(p/q)\,f(q)$, ceea ce arată că $f(x)=x$ pentru numerele raționale.

Prin continuitate rezultă că $f(x)=x$ pentru toate numerele pozitive.

Înlocuind acum $y=-x$ în relația dată, obținem $f(0)=f(x)+f(-x)$ și astfel $f(-x)=-f(x)=-x$, deci $f(x)=x$.

44. Fie $E\subset X$ și f este o funcție dată pe X; restricția lui f la E este o funcție g definită pe mulțimea E

$$g(x)=f(x),\quad x\in E.$$

În R^2 definim funcțiile f și g prin egalitățile

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & (x,y)=(0,0);\end{cases}\qquad g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^6}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

Să se arate că f este mărginită pe R^2 dar discontinuă în origine; g nu este mărginită în orice vecinătate a punctului (0, 0), iar restricția fiecăreia din funcțiile f și g pe fiecare dreaptă din R^2 este continuă.

R: Se observă că pentru orice $(x,y)\in R^2$,.

$$-\frac{1}{2}\leqslant\frac{xy^2}{x^2+y^4}\leqslant\frac{1}{2},\quad \text{deoarece: } (x+y)^2\geqslant 0 \text{ și } (x-y^2)^2\geqslant 0.$$

De asemenea

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\frac{1}{2}\quad \text{pe curba } x=y^2$$

şi

$\frac{1}{2} \neq 0$, deci nu este continuă în origine.

Trebuie să arătăm că $g(x, y)$ nu este mărginită în vecinătatea originii. Pentru $x = y^3$ şi cînd $y \to 0$

$$\lim_{y\to 0} \frac{xy^2}{x^2 + y^6} = \lim_{y\to 0} \frac{y^5}{2y^6} = \pm \infty$$

deci funcţia nu este mărginită în orice vecinătate a originii, deoarece orice vecinătate a originii conţine puncte ale parabolei $x = y^3$.

Să considerăm o dreaptă Δ de ecuaţie $y = mx + n$ şi restricţiile lui f şi g la Δ, anume

$$\varphi(x) = f(x, mx + n) = \begin{cases} \dfrac{x(mx+n)^2}{x^2 + (mx+n)^4}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$\psi(x) = g(x, mx + n) = \begin{cases} \dfrac{x(mx+n)^2}{x^2 + (mx+n)^6}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} \varphi(x) = 0 \quad \text{şi} \quad \lim_{x\to 0} \psi(x) = 0$$

funcţiile φ şi ψ sînt deci continue.

45. Fie $f(x)$ continuă pe $[0,1]$. Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) = 0.$$

R: $f(x)$ este uniform continuă pe $[0, 1]$, deoarece este continuă pe un compact, deci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N(\varepsilon)$ astfel ca $\left|f(k/n) - f\left(\frac{k+1}{n}\right)\right| < \varepsilon$ $(n > N;\ k = 0, 1, \ldots, n-1)$; pentru $n > N$ avem

$$S_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_{n-1}^k \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k+1}{n}\right)\right]$$

$$|S_n| < \frac{\varepsilon}{2^n} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k = \frac{\varepsilon}{2}$$

ceea ce demonstrează relaţia.

46. Fie f o funcţie reală definită pe $[a, b]$ şi $x_0 \in (a, b)$ să se arate că dacă la orice $\eta > 0$ există $\varepsilon > 0$ astfel încît $|x - x_0| < \eta$ conduce la $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, funcţia f nu este continuă în punctul x_0.

R: Definiţia cu şiruri a continuităţii într-un punct: „la orice şir (x_n), convergent către x_0, $x_n \neq x_0$ $x_n \in [a, b]$, $x_0 \in [a, b]$ şirul valorilor funcţiei $(f(x_n))$ este convergent către $f(x_0)$", nu este satisfăcută. În adevăr, din enunţ

nu rezultă că, şirul (x_n) fiind ales, şirul valorilor $(f(x_n))$ converge către $f(x_0)$, ε putînd fi luat fix, ci numai că $f(x_n)$ se găseşte în intervalul $(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$. De exemplu

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

cu $\varepsilon = 1$ satisface condiţiilor din enunţ, dar nu este continuă în punctul $x = 0$.

47. Fie funcţia $f: [0,1] \to R$ definită în modul următor:
fie $x = 0, a_1, a_2 \ldots a_n$, un punct din $[0, 1]$ atunci

α) $\qquad f(x) = 0, a_{2n}a_{2n+2}a_{2n+4} \ldots$

dacă şirul de zecimale $a_1, a_3, a_5, \ldots$ începînd de la rangul $2n - 1$ este periodic

β) $\qquad f(x) = 0$

dacă acelaşi şir de zecimale $a_1, a_3, a_5, \ldots$ nu este periodic.

Să se arate că funcţia astfel definită, în orice interval $(a, b) \subset [0, 1]$, ia toate valorile cuprinse între 0 şi 1, inclusiv valorile 0 şi 1. (Exemplul lui H. Lebesgue).

R: Fie $y_0 \in [0, 1]$ în scriere zecimală

$$y_0 = 0, b_1b_2b_3 \ldots$$

şi (a, b) un interval oarecare din $[0, 1]$ să arătăm că există $x_0 \in (a, b)$ astfel încît $f(x_0) = y_0$. Fie x un punct oarecare din (a, b), anume

$$x = 0, a_1a_2a_3 \ldots$$

şi

$$\eta = \min \{|x - a|, |x - b|\}.$$

Dacă şirul $a_1, a_3, a_5, \ldots$ nu este periodic de la rangul $2n - 1$, atunci numărul

$$x' = 0, a_1a_2 \ldots a_{2n-2}a'_{2n-1}a_{2n}a'_{2n+1}a_{2n+2} \ldots$$

unde $a'_{2n-1}, a'_{2n+1}, a'_{2n+3}, \ldots$ este un şir periodic oarecare, are această proprietate şi în plus se găseşte în intervalul (a, b) deoarece

$$|x' - x| < \frac{1}{10^{2n-2}} < \frac{\eta}{2}.$$

Dacă şirul $a_1, a_3, a_5, \ldots$ este periodic, putem să-l transformăm într-unul neperiodic înlocuind numărul a_{2n-1} cu a''_{2n-1} diferit de a_{2n-1}; numărul

$$x'' = 0, a_1, a_2 \ldots a_{2n-2}a''_{2n-1}a_{2n} \ldots$$

se găsește în (a, b) deoarece $|x - x''| < \frac{1}{10^{2n-2}} < \frac{\eta}{2}$. Din cele de mai sus rezultă că putem totdeauna construi un număr $x_0 \in (a, b)$ care să îndeplinească fie condiția de la (α) fie aceea de la (β) din enunț. Să revenim la problema pusă:

I) dacă $y_0 = 0$, luăm un număr x_0 din (a, b) care îndeplinește condiția (β) și avem $f(x_0) = y_0 = 0$.

II) dacă $0 < y_0 \leqslant 1$, anume

$$y_0 = 0, b_1 b_2 \dots b_n \dots$$

(dacă $y_0 = 1$, se ia $y_0 = 0{,}999 \dots 9 \dots$) atunci x_0 este dat de
$x_0 = 0, a_1 a_2 \dots a_{2n-1} b_1 a_{2n+1} b_2 a_{2n+3} b_3 \dots$
numărul n fiind determinat de condiția

$$|x - x_0| < \frac{1}{10^{2n-2}} < \frac{\eta}{2}$$

deci $x_0 \in (a, b)$ și $f(x_0) = y_0$. Deoarece $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ urmează $[f(a), f(b)] \subset \subset [0, 1]$, prin urmare $f(x)$ trece prin toate valorile cuprinse între $f(a)$ și $f(b)$. Mai mult, din demonstrație rezultă că în orice interval (a, b) ia orice valoare din intervalul $[0, 1]$

48. Să se arate că funcțiile:

a) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, \quad x \in [-1, 1]$

b) $g(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x^3 E\left(\frac{1}{x}\right), & x \in (0, 1] \end{cases}$

sînt cu variație mărginită.

R: a) $f'(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$ și $|f'(x)| \leqslant 4$ deci are derivate mărginite și este cu variație mărginită.

b) Pentru a arăta că $g(x)$ este cu variație mărginită pornim de la definiție.

Fie o diviziune oarecare

$$\delta: \quad 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_n = 1.$$

Trebuie arătat că suma

$$S_\delta = |f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_2) - f(x_1)| + \dots + |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + \dots$$
$$\dots + |f(1) - f(x_{k-1})|$$

este mărginită independent de n și alegerea punctelor de diviziune

$g(x)$ se mai poate pune sub forma:

$$g(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ x^3, & \frac{1}{2}<x\leqslant 1\\ 2x^3, & \frac{1}{3}<x\leqslant\frac{1}{2}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ px^3, & \frac{1}{p+1}<x\leqslant\frac{1}{p}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{cases}$$

2 puncte consecutive de diviziune se pot găsi într-un interval $\left(\frac{1}{p+1}, \frac{1}{p}\right]$ sau în 2 intervale vecine:

$$|f(x_{k+1})-f(x_k)|=|p(x_{k+1}^3-x_k^3)|\leqslant p\left|\frac{1}{p^3}-\frac{1}{(p+1)^3}\right|\leqslant\frac{1}{p^2}+\frac{p}{(p+1)^3}\leqslant\frac{2}{p^2};$$

$$x_k,\ x_{k+1}\in\left(\frac{1}{p+1}, \frac{1}{p}\right]$$

Dacă

$$x_{k+1}\in\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{p-1}\right]\quad\text{şi}\quad x_k\in\left(\frac{1}{p+1}, \frac{1}{p}\right],$$

$$|f(x_{k+1})-f(x_k)|=|(p-1)\ x_{k+1}^3-px_k^3|\leqslant\frac{p-1}{(p-1)^3}+\frac{p}{p^3}\leqslant\frac{1}{p^2}+\frac{1}{(p-1)^2}\leqslant\frac{2}{(p-1)^2};$$

deci suma va fi majorată de:

$$S_\delta\leqslant\sum_{p=1}^{n}\frac{2}{p^2}\leqslant M\quad\text{deoarece}$$

$\sum_{p=1}^{n}\frac{2}{p^2}$ este suma parţială a unei serii cu termeni pozitivi convergentă.

49. Să se arate că funcţia

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ \operatorname{sgn}\left(\cos\frac{\pi}{2x}\right), & x\in(0,1],\end{cases}$$

nu este cu variaţie mărginită.

R: Să considerăm următoarea diviziune a intervalului $[0, 1]$

$$d: x_0=0<x_1=\frac{1}{4k+2}<x_2=\frac{1}{4k}<\ldots<x_{2k}=$$

$$=\frac{1}{6}<x_{2k+1}=\frac{1}{4}<x_{2k+2}=\frac{1}{2}<x_{2k+3}=1.$$

Variația funcției f corespunzătoare diviziunii d este

$$\mathbf{V}_d(f) = |f(x_1) - f(0)| + |f(x_2) - f(x_1)| + \ldots$$

$$+ |f(x_{2k+2}) - f(x_{2k+1})| + |f(x_{2k+3}) - f(x_{2k+2})|$$

Punctele diviziunii d au fost alese astfel încît diferența între valorile funcției în cele 2 puncte să fie 2.

Astfel

$$\mathbf{V}_d(f) = \left|\operatorname{sgn}\left(\cos(4k+2)\frac{\pi}{2}\right)\right| + \left|\operatorname{sgn}(\cos 2k\pi) - \operatorname{sgn}\left(\cos(4k+2)\frac{\pi}{2}\right)\right| +$$

$$\ldots + |\operatorname{sgn}(\cos\pi) - \operatorname{sgn}(\cos 2\pi)| + \left|\operatorname{sgn}\left(\cos\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sgn}(\cos 2\pi)\right| =$$

$$= 1 + \underbrace{2 + \ldots + 2}_{k} + 1 = 2k + 2.$$

Se observă că pentru $k \to \infty$, $\mathbf{V}_d(f)$ nu este mărginită. Funcția f este însă mărginită pe $[0, 1]$.

50. Să se scrie ca diferența a 2 funcții monoton crescătoare funcția:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1] \\ 1 - x, & x \in (1, 2]. \end{cases}$$

R: Conform teoremei de descompunere a lui Jordan, orice funcție cu variație mărginită se poate scrie ca diferență de 2 funcții monotone.

$f(x)$ este cu variație mărginită deoarece este monotonă pe fiecare din intervalele $[0, 1]$ și $(1, 2]$.

Atunci $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$, unde

$$\varphi(x) = \bigvee_0^x f(x) = \begin{cases} \int_0^x |f'(x)|\,dx = \int_0^x dx = x, & x \in [0, 1] \\ x + \int_1^x dx = 2x - 1, & x \in (1, 2]. \end{cases}$$

Deci

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1] \\ 2x - 1, & x \in (1, 2] \end{cases}$$

$$\psi(x) = \varphi(x) - f(x),$$

deci:

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1] \\ 3x - 2, & x \in (1, 2] \end{cases}$$

funcții ce sînt ambele crescătoare.

51. Fie f: $[a, b] \to R$ o funcţie cu variaţia mărginită pe $[a, b]$
Să se arate că f este mărginită.

R: Fie $x \in (a, b)$. Avem

$$|f(x) - f(a)| + |f(x) - f(b)| \leqslant \bigvee_a^b (f)$$

însă

$$|f(x)| \leqslant |f(x) - f(a)| + |f(a)|$$

$$|f(x)| \leqslant |f(x) - f(b)| + |f(b)|$$

de unde rezultă

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{2} [|f(a)| + |f(b)|] + \bigvee_a^b (f),$$

pentru orice $x \in [a, b]$. Rezultatul rămîne valabil cînd f ia valori într-un spaţiu metric.

52. Fie f, g: $[a, b] \to R$ cu variaţia mărginită pe $[a, b]$; să se arate că $f \cdot g$ este cu variaţia mărginită pe $[a, b]$.

R: Fie d: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ o diviziune a intervalului $[a, b]$. Putem scrie

$$f(x_{i+1})\, g(x_{i+1}) - f(x_i)\, g(x_i) = f(x_{i+1}) [g(x_{i+1}) - g(x_i)] + \\ + g(x_i) [f(x_{i+1}) - f(x_i)]$$

de unde rezultă

$$|f(x_{i+1})\, g(x_{i+1}) - f(x_i)\, g(x_i)| \leqslant |f(x_{i+1})|\, |g(x_{i+1}) - g(x_i)| + \\ + |g(x_i)|\, |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$$

ţinînd seamă că f şi g sînt mărginite deci

$$|f(x)| \leqslant A_1, \quad |g(x)| \leqslant A_2, \quad x \in [a, b]$$

obţinem

$$V_a(fg) \leqslant A_1 V_a(g) + A_2 V_a(f) \leqslant A_1 \bigvee_a^b (g) + A_2 \bigvee_a^b (f) \leqslant M$$

deoarece f şi g sînt cu variaţia mărginită.

53: Fie f: $[a, b] \to R$ cu variaţia mărginită pe $[a, b]$. Să se arate că dacă f este continuă la dreapta în punctul $x \in [a, b)$ atunci variaţia totală $\bigvee_a^y (f)$ este continuă la dreapta în x.

R: f fiind continuă la dreapta în x la orice $\varepsilon > 0$ există $\eta(\varepsilon) > 0$ astfel încît pentru orice $y \in [x, x + \eta)$ să avem $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Să considerăm o diviziune d a intervalului $[x, y]$ de normă mai mică decît η şi fie x_1 primul punct al diviziunii interior, deci $x < x_1 < y$. Avem

$$V_d(f) \leqslant |f(x) - f(x_1)| + \overset{y}{\underset{x_1}{V}}(f)$$

sau

$$V_d(f) \leqslant \varepsilon + \overset{y}{\underset{a}{V}}(f) - \overset{x+0}{\underset{a}{V}}(f)$$

şi pentru că partea a doua este independentă de d, deducem

$$\overset{y}{\underset{x}{V}}(f) \leqslant \varepsilon + \overset{y}{\underset{a}{V}}(f) - \overset{x+0}{\underset{a}{V}}(f),$$

sau

$$\overset{x+0}{\underset{a}{V}}(f) - \overset{x}{\underset{a}{V}}(f) \leqslant \varepsilon$$

şi pentru că ε este arbitrar, rezultă imediat

$$\overset{x+0}{\underset{a}{V}}(f) = \overset{x}{\underset{a}{V}}(f).$$

54. Fie g definită pe $[a, b]$ cu valori în R cu variaţie mărginită pe $[a, b]$. Să se arate că dacă

$$\sup_{x \in [a, b]} \frac{1}{|g(x)|} = A < \infty$$

atunci şi $\frac{1}{g}$ este cu variaţie mărginită.

R: Putem scrie

$$\frac{1}{g(x_1)} - \frac{1}{g(x_2)} = \frac{g(x_2) - g(x_1)}{g(x_1)\, g(x_2)}$$

deci

$$\left| \frac{g(x_2) - g(x_1)}{g(x_1)\, g(x_2)} \right| \leqslant A^2 |g(x_2) - g(x_1)|.$$

Fie acum o diviziune $d : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ a intervalului $[a, b]$, avem

$$V_d\left(\frac{1}{g}\right) \leqslant A^2 V_d(g) \leqslant A^2 \overset{b}{\underset{a}{V}}(g)$$

şi pentru că g este cu variaţie mărginită rezultă că şi $\frac{1}{g}$ este cu variaţie mărginită.

55. Fie f definită pe [0, 1] astfel

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[0, \frac{1}{3}\right), \\ 3, & x = \frac{1}{3}, \\ 0, & x \in \left(\frac{1}{3}, 1\right]. \end{cases}$$

Să se arate că f este cu variația mărginită însă $\lim\limits_{d_n \in \mathfrak{D}} V_{d_n}(f)$, unde $\mathfrak{D}$ este mulțimea tuturor diviziunilor lui [0, 1], nu există.

R: Variația totală se obține printr-o diviziune care conține și punctul $x = \frac{1}{3}$ și este dată de $\bigvee_0^1 (f) = 5$.

Pentru orice diviziune care nu conține punctul $x = \frac{1}{3}$ $\bigvee_0^1 (f) = 1$. Prin urmare pentru orice șir de diviziuni (d_n) cu norma $\nu(d_n) \to 0$, care nu conțin punctul $x = \frac{1}{3}$

$$\lim_{n \to 0} V_{d_n}(f) = 1$$

iar pentru orice șir de diviziuni (δ_n) cu $\nu(\delta_n) \to 0$ care conțin și punctul $x = \frac{1}{3}$ avem

$$\lim_{n \to \infty} V_{\delta_n}(f) = 5.$$

56. Fie $\bar{f}(t)$ funcția vectorială definită astfel

$$\bar{f}(t) = \begin{cases} (-4t, 0, 0), & 0 \leqslant t < \frac{1}{4} \\ (-1, 4t - 1, 0), & \frac{1}{4} \leqslant t < \frac{1}{2} \\ (-1, 1, 4t - 2), & \frac{1}{2} \leqslant t < \frac{3}{4} \\ (4t - 4, 1, 1), & \frac{3}{4} \leqslant t < 1. \end{cases}$$

Să se determine $\bar{f}(I)$, $I = [0, 1]$.

R: Să notăm componentele funcției cu $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$. Pentru a stabili $\bar{f}(I)$ este suficient să determinăm valorile pe care le pot lua funcțiile componente.

Dar:

$$f_1(t) = \begin{cases} -4t, & 0 \leqslant t < \frac{1}{4}, \quad -1 < -4t \leqslant 0 \\ -1, & \frac{1}{4} \leqslant t < \frac{3}{4} \\ 4t - 4, & \frac{3}{4} \leqslant t \leqslant 1, \quad 3 \leqslant 4t \leqslant 4, \ -1 \leqslant 4t - 4 \leqslant 0 \end{cases}$$

de unde: $f_1(I) = [-1, 0]$.

La fel

$$f_2(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t < \frac{1}{4} \\ 4t - 1, & \frac{1}{4} \leqslant t < \frac{1}{2}, \quad 1 \leqslant 4t < 2, \quad 0 \leqslant 4t - 1 < 1 \\ 1, & \frac{1}{2} \leqslant t < 1 \end{cases}$$

deci $f_2(I) = [0, 1]$.

În mod asemănător

$$f_3(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t < \frac{1}{2} \\ 4t - 2, & \frac{1}{2} \leqslant t < \frac{3}{4}, \quad 2 \leqslant 4t < 3, \quad 0 \leqslant 4t - 2 < 1 \\ 1, & \frac{3}{4} \leqslant t < 1. \end{cases}$$

încît

$$f_3(I) = [0, 1].$$

Deci mulțimea valorilor funcției vectoriale de variabilă scalară

$$\bar{f}(t) = (f_1(t), \ f_2(t), \ f_3(t)), \ t \in [0, 1]$$

este intervalul $[-1, 0] \times [0, 1] \times [0, 1]$.

57. Fie $f(x_1, ..., x_n)$ o funcție reală definită pe o mulțime deschisă $G \subset R^n$ și fie $v_i = (\lambda_{i1}, ..., \lambda_{in})$, $i = 1, 2, ..., n$, n vectori liniar independenți din R^n. Dacă f este continuă pe fiecare dreaptă ce trece prin G și este paralelă la v_i, $i = 1, 2, ..., n$ și dacă f este monotonă pe fiecare din aceste drepte, atunci $f(x_1, ..., x_n)$ este continuă în G.

R: Alegem un sistem de axe astfel ca v_i să coincidă cu axa i.

$\bar{f}(x_1, ..., x_n)$ este monoton crescătoare în lungul lui v_i.

În R^n să definim relația de ordine astfel: pentru $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ și $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$, $a \geqslant b$ dacă $a_i \geqslant b_i (\forall)$, $i = 1, 2, ..., n$.

Fie x_0 un punct din G. Arătăm că f este continuă în x_0.

Să presupunem pentru simplificarea demonstrației că $x_0 = 0$ și $f(x_0) = 0$.

Deoarece G este deschisă putem găsi $h > 0$ astfel ca:

$$\{(x_1, ..., x_n), |x_i| < h, \quad i = 1, ..., n\} \subset G.$$

Prin ipoteză există p_1, $0 < p_1 < h$ astfel că $0 \leqslant f(p_1, 0, ..., 0) < \frac{\varepsilon}{n}$; p_1 fiind găsit, putem găsi p_2, $0 < p_2 < h$ astfel ca $0 \leqslant f(p_1, p_2, 0... 0) - f(p_1, 0 ... 0) < \frac{\varepsilon}{n}$ și deci $0 < f(p_1, p_2, 0 ... 0) < \frac{2\varepsilon}{n}$.

Prin inducție găsim $p = (p_1, p_2, ..., p_n)$ astfel ca $0 < p_i < h$; $i = 1, 2, ..., n$ și astfel ca $0 \leqslant f(p) < \frac{n\varepsilon}{n} = \varepsilon$.

La fel găsim pe $q = (q_1, ..., q_n)$ astfel ca $h < q_i < 0$ pentru $i = 1, 2, ..., n$ și să avem

$$0 \geqslant f(q) > -\varepsilon.$$

Fie $B = \{(x_1, ..., x_n); q_i < x_i < p_i; i = 1, ..., n\}$ dacă $x \in B$, $q \leqslant x \leqslant p$ urmează $-\varepsilon < f(q) \leqslant f(x) \leqslant f(p) < \varepsilon$
ceea ce arată că $f(x)$ este continuă în punctul $x = 0$.

58. Să se arate că funcția

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy + x^2 y \ln |x + y|}{x^2 + y^2}, & x \neq 0, \quad y = 0 \\ 0, & x = 0, \quad y = 0 \end{cases}$$

este continuă parțial în punctul (0, 0) însă nu este continuă în raport cu ambele variabile în acest punct.

R: Pentru $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(x, y)$ este evident continuă. Pentru a arăta că f este continuă parțial în punctul (0, 0) este suficient să calculăm limitele

$$\lim_{y \to 0} f(0, y), \quad \lim_{x \to 0} f(x, 0)$$

și valorile obținute (dacă există) să fie egale cu $f(0, 0) = 0$.

Avem

$$f(0, y) = 0, \quad \lim_{y \to 0} f(0, y) = 0;$$

$$f(x, 0) = 0, \quad \lim_{x \to 0} f(x, 0) = 0,$$

deci f este continuă parțial în punctul (0, 0).

Să considerăm acum dreapta $y = mx$, $m \in R$,

$$f(x, mx) = \frac{x^2 m + mx^3 \ln (x(1 + m))}{x^2(1 + m^2)};$$

deci după dreapta D, $\lim\limits_{x\to 0,\, y\to 0} f(x, y)$ este dată de

$$\lim_{x\to 0} f(x, mx) = \frac{m}{1+m^2}, \quad m\in R$$

de unde rezultă că f nu este continuă în raport cu ambele variabile în punctul (0, 0).

59. Să se arate că funcţia

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2 + \sin(x^3 + y^5)}{x^2 + y^4}, & x \neq 0, \quad y \neq 0 \\ 0, & x = 0, \quad y = 0 \end{cases}$$

deşi are limite parţiale în punctul (0, 0), însă nu are limita în punctul (0, 0).

R: Pentru $x = 0$, avem

$$f(0, y) = \frac{\sin y^5}{y^4} \text{ deci } \lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} y \cdot \frac{\sin y^5}{y^5} = 0$$

deci

$$\lim_{\substack{x=0\\ y=0}} f(x, y) = 0 = f(0, 0).$$

Pentru $y = 0$, obţinem

$$f(x, 0) = \frac{\sin x^3}{x^2}; \quad \lim_{x\to 0} f(x, 0) = \lim_{x\to 0} x \cdot \frac{\sin x^3}{x^3} = 0$$

deci

$$\lim_{\substack{y=0\\ x\to 0}} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$$

deci f are limite parţiale în punctul (0, 0).

Să considerăm acum curba $y^2 = mx$, $m\in R$ şi să facem ca $(x, y) \to (0, 0)$ pe această parabolă. Avem

$$f(x, y) = \frac{mx^2 + \sin(x^3 + m^{\frac{5}{2}} x^{\frac{5}{2}})}{x^2(1+m^2)}, \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

sau

$$f(x, y) = \frac{m^2}{1+m^2} + \frac{\sin(x^3 + m^{\frac{5}{2}} x^{\frac{5}{2}})}{x^2(1+m^2)}$$

deci pentru $m\in R$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = \frac{m^2}{1+m^2}.$$

Prin urmare $f(x,y)$ nu are limita în punctul (0, 0).

60. Fie

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|}{y^2} \exp\left(\frac{|x|}{y^2}\right), & y \neq 0 \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

Să se studieze continuitatea funcţiei în punctul $O(0,0)$.

R: Calculăm funcţiile parţiale

$$f(x, 0) = 0, \quad f(0, y) = 0$$

deci $\lim\limits_{x\to 0} f(x, 0) = \lim\limits_{y\to 0} f(0, y) = 0$, ceea ce arată că funcţiile parţiale sînt continue în origine.

Fie $y = tx$;

$$f(x, tx) = \frac{|x|}{t^2x^2} \exp\left(-\frac{|x|}{t^2x^2}\right)$$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x, tx) = 0$ oricare ar fi t finit, $t \neq 0$.

Pe arcul de curbă $x = y^2$, funcţia $f(x, y)$ devine:

$$f(y^2, y) = \frac{1}{e}$$

ceea ce arată că funcţia $f(x, y)$ nu este continuă în origine.

61. Se consideră funcţia $f(x, y) = (f_1, f_2)$, $f: (-\infty, \infty)\times(0, \infty) \to R^2$ unde $f_1(x, y) = x$ şi

$$f_2(x, y) = \begin{cases} y - x^2, & x^2 \leqslant y \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \\ \frac{y^2 - x^2y}{x^2}, & 0 \leqslant y \leqslant x^2 \end{cases}$$

a) Să se studieze continuitatea funcţiei în origine;

b) Să se arate că în orice vecinătate a originii există 2 puncte distincte care au aceeaşi imagine prin funcţia f.

R: a) Valoarea funcţiei în origine este (0, 0).

Studiem continuitatea funcţiilor componente $f_1(x, y)$ şi $f_2(x, y)$

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} f_1(x,y) = 0.$$

Fie $x = \rho \cos\theta$, $y = \rho \sin\theta$, $\theta\in[0, \pi]$

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} f_2(x, y) = \lim_{\rho\to 0} (\rho \cos\theta - \rho^2 \sin^2\theta) = 0, \quad \rho \cos^2\theta \leqslant \sin\theta$$

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} f_2(x, y) = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2 \sin\theta(\sin\theta - \rho\cos^2\theta)}{\rho^2 \cos^2\theta} = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta},$$

ceea ce arată că funcţia f_2 nu este continuă în origine, deci f nu este continuă în origine.

b) Fie $\varepsilon < 0$ arbitrar şi punctele $y_1 = x^2 + \varepsilon$ şi $y_2 = x^2 - \varepsilon$, $f_2(x\, x^2 + \varepsilon) = \varepsilon$, $f_2(x, x^2 - \varepsilon) = -\varepsilon + \frac{\varepsilon}{x^2}$.

Pentru ca $f_2(x, x + \varepsilon) = f_2(x, x - \varepsilon)$ trebuie deci ca:

$$\varepsilon = -\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{x^2}$$

sau:

$$2\varepsilon = \frac{\varepsilon^2}{x^2}, \quad 2 = \frac{\varepsilon}{x^2}; \quad x = \pm\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}.$$

CAPITOLUL IV

DERIVATE. DIFERENȚIALE. FUNCȚII DIFERENȚIABILE.

1. Derivata funcției

$$f(x) = E(x) \sin^2 \pi x, \quad x \in R$$

R: Funcția $f(x)$ se poate scrie

$$f(x) = \begin{cases} -n \sin^2 \pi x, & x \in [-n, -n+1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -\sin^2 \pi x, & x \in [-1, 0) \\ 0, & x \in [0, 1) \\ \sin^2 \pi x, & x \in [1, 2) \\ \vdots \\ n \sin^2 \pi x, & x \in [n, n+1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Se observă că pentru $x \in (n, n+1)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ funcția este derivabilă și derivate există

$$f'(x) = 2\pi n \sin \pi x \cos \pi x = \pi n \sin 2\pi x$$

sau:

$$f'(x) = \pi E(x) \sin 2\pi x, \quad x \in (n, n+1).$$

Pentru $x = n$, funcția este continuă. Derivatele laterale sînt date de:

$$f'_d(n) = \lim_{x \to n} \frac{n \sin^2 \pi x - n \sin^2 \pi n}{x - n} = \lim_{x \to n} \frac{n \sin \pi(x-n) \sin \pi(x+n)}{x - n} =$$

$$= \lim_{x \to n} \frac{n \sin \pi(x-n)}{\pi} = 0$$

$$f'_s(n) = \lim_{x \to n} \frac{(n-1) \sin^2 \pi x - n \sin^2 \pi n}{x - n} = 0$$

deci, funcția $f(x)$ este derivabilă în R în afara punctelor $x = \pm n$, $n \in N$ în care admite derivate laterale.

2. Fie $f(x)$ o funcție continuă pe $[0, 1]$, cu valori în R, derivabilă pe $(0,1)$.

Să presupunem că $|xf'(x) - f(x) + f(0)| < x^2M$ pentru toți $x \in (0, 1)$ și M fixat. Există $f'(0)$?

R: Să presupunem că $f(0) = 0$. Fie $h(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x \in (0, 1)$; este suficient să arătăm că $\lim_{x \to 0} h(x)$ există; h este diferențiabilă în $(0, 1)$ și

$$f'(x) = (xh(x))' = xh'(x) + h(x)$$

de unde, $xf'(x) - f(x) = x^2h'(x)$.

Prin ipoteză, $|x^2h'(x)| < Mx^2$ sau $|h'(x)| < M$; dacă (x_n) este un șir din $(0, 1)$ ce tinde la zero, atunci

$$h(x_m) - h(x_n) = h'(\xi)(x_m - x_n)$$

unde $\xi \in (x_m, x_n)$; astfel: $|h(x_m) - h(x_n)| < M|x_m - x_n|$ cu $n, n > N(\varepsilon)$; prin urmare $\{h_n(x)\}$ este un șir Cauchy, deci convergent; deoarece (x_n) a fost arbitrar, $\lim_{x \to 0} h(x)$ există.

3. Să se calculeze derivata funcției $f(x) = x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}$ (n ori), $x > 0$.

R: Funcția poate fi definită prin relația de recurență $y_n = x^{y_{n-1}}$, $y_1 = x^x$, $y_0 = x$, $y_{-1} = 1$. Dar logaritmăm, apoi derivăm, obținem

$$\frac{y_n'}{y_n} = \frac{y_{n-1}'}{y_{n-1}}(y_{n-1} \cdot \ln x) + \frac{y_{n-1}}{x}$$

dînd lui n valorile $1, 2, \ldots, n$, rezultă

$$\frac{y_1'}{y_1} = \frac{y_0'}{y_0}(y_0 \ln x) + \frac{y_0}{x}$$

$$\frac{y_2'}{y_2} = \frac{y_1'}{y_1}(y_1 \ln x) + \frac{y_1}{x}$$

$$\vdots$$

$$\frac{y_n'}{y_n} = \frac{y_{n-1}'}{y_{n-1}}(y_{n-1} \ln x) + \frac{y_{n-1}}{x}$$

de unde:

$$y_n' = \sum_{k=0}^{n} y_n y_{n-1} \cdots y_{n-k-1} \frac{(\ln x)}{x} k.$$

4. Să se stabilească relațiile

(a) $$1 = \sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m (1 - x)^{n-m},$$

(b) $$nx = \sum_{m=0}^{n} m C_n^m x^m (1 - x)^{n-m},$$

(c) $$[1 + (n - 1)nx = \sum_{m=0}^{n} m^2 C_n^m x^m (1 - x)^{n-m},$$

şi

(d) $$nx(1-x) = \sum_{m=0}^{n} (nx-m)^2 C_n^m x^m (1-x)^{n-m}$$

R: Avem după binomul lui Newton cu $m, n \in N$

(e) $$(x+y)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m y^{n-m}$$

deci pentru $y = 1 - x$ rezultă (a). Dacă derivăm pe (e) în raport cu x apoi înmulţim cu x, obţinem

(f) $$nx(x+y)^{n-1} = \sum_{m=0}^{n} m C_n^m x^m y^{n-m}$$

în care dacă înlocuim pe y cu $1 - x$ ne dă pe (b).

Dacă aceeaşi operaţie o facem în (f) obţinem

$$nx[(x+y)^{n-1} + (n-1)x(x+y)^{n-2}] = \sum_{m=0}^{n} m^2 C_n^m x^m y^{n-m}$$

unde dacă punem $y = 1 - x$ rezultă (c).

Dacă pe (a) o înmulţim cu n^2x^2, pe (b) cu $-2nx$, pe (c) cu 1 şi le adunăm, ne dă

$$n^2x^2 - 2n^2x^2 + nx[1 + (n-1)x] = \sum_{m=0}^{n} (nx-m)^2 C_n^m x^m (1-x)^{n-m}$$

şi pentru că primul termen este

$$n^2x^2 - 2n^2x^2 + nx + n^2x^2 - nx^2 = nx(1-x),$$

am demonstrat şi pe (d).

5. Fie $f(x)$ un polinom de grad „n" cu coeficientul termenului ce conţine pe x^n egal cu 1 şi care admite n rădăcini reale şi distincte.

Fie $g(x)$ un polinom de grad $(n-1)$ cu coeficientul termenului $(n-1)$ egal cu 1.

Să se arate că

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{g(x_i)}{f'(x_i)} = 1$$

unde cu x_i am notat rădăcinile ecuaţiei

$$f(x) = 0.$$

R: Pentru $\frac{g(x)}{f(x)}$ avem o descompunere în elemente simple de forma:

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{x - x_k}$$

unde $A_k = \lim_{x \to x_k} \frac{(x-x_k)\,g(x)}{f(x)} = \lim_{x \to x_k} \frac{g(x) + (x-x_k)\,g'(x)}{f'(x)} = \frac{g(x_k)}{f'(x_k)}$

deci

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{g(x_k)}{f'(x_k)} \cdot \frac{1}{x - x_k}.$$

Amplificăm cu x și facem pe x să tindă la infinit

$$\lim_{x\to\infty} \frac{xg(x)}{f(x)} = 1, \text{ de unde } \sum_{k=1}^{n} \frac{g(x_k)}{f'(x_k)} = 1.$$

6. Fie $\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1-x)^2}}, & x \in (-1,1) \\ 0, & x \leqslant -1, \quad x \geqslant 1. \end{cases}$

Să se arate că $\varphi(x)$ este indefinit derivabilă în R.

R: Trebuie să studiem derivabilitatea funcției $\varphi(x)$ în $x = 1$, $x = -1$. Observăm mai întîi că în aceste puncte φ este continuă. Avem

$$\varphi'_d(1) = \lim_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} \frac{\varphi(x) - \varphi(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{e^{-\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1-x)^2}}}{x - 1} =$$

$$= \frac{1}{e^{\frac{1}{4}}} \lim_{x\to 1} \frac{e^{-\frac{1}{(x-1)^2}}}{x - 1} = 0,$$

deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} x^n e^{-x} = 0$, $n > 0$ și, în acest caz dacă notăm: $\frac{1}{x-1} = y$ obținem ye^{-y^2}; la fel se obține și pentru $\varphi'_s(1)$, deci funcția admite derivată de ordinul I în punctul 1 și în punctul (-1)

$$\varphi'(x) = \begin{cases} \left(\frac{2}{(x+1)^3} - \frac{2}{(1-x)^3}\right) e^{-\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1-x)^2}}, & x \in (-1, 1) \\ 0, & x \leqslant -1, \quad x \geqslant 1. \end{cases}$$

Pentru a vedea dacă această funcție este derivabilă în punctele $x = 1$, $x = -1$, procedăm la fel și sîntem conduși la o limită asemănătoare.

Raționînd prin inducție, funcția $\varphi(x)$ este infinit derivabilă.

7. Se măsoară laturile a, b, c ale unui triunghi cu erori relative de $3‰$, $5‰$, $6‰$. Să se găsească eroarea relativă cu care se poate calcula aria triunghiului.

R: Aria triunghiului în funcție de laturi este dată de

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

și pentru că $p > 0$, $p - a > 0$, $p - b > 0$, $p - c > 0$, avem și

$$\ln S = \frac{1}{2}[\ln p + \ln(p-a) + \ln(p-b) + \ln(p-c)].$$

Calculăm diferențiala lui $\ln S$,

$$\frac{dS}{S}=\frac{1}{2}\frac{dp}{p}+\frac{1}{2}\frac{d(p-a)}{p-a}+\frac{1}{2}\frac{d(p-b)}{p-b}+\frac{1}{2}\frac{d(p-c)}{p-c}$$

însă

$$\frac{dp}{p}=\frac{da+db+dc}{a+b+c},\quad \left|\frac{dp}{p}\right|\leqslant \max\left(\frac{da}{a},\frac{db}{b},\frac{dc}{c}\right)$$

și pentru că

$$\left|\frac{dS}{S}\right|\leqslant\frac{1}{2}\left|\frac{dp}{p}\right|+\frac{1}{2}\left|\frac{d(p-a)}{p-a}\right|+\frac{1}{2}\left|\frac{d(p-b)}{p-b}\right|+\frac{1}{2}\left|\frac{d(p-c)}{p-c}\right|.$$

urmează

$$\left|\frac{dS}{S}\right|\leqslant\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\frac{6}{1000}=\frac{12}{1000}=0{,}012;$$

în procente, eroarea relativă este:

$$100\cdot\left|\frac{dS}{S}\right|\leqslant 1{,}2\%.$$

8. Să se discute, folosind teorema lui Rolle, **numărul rădăcinilor reale** cît și intervalele în care se găsesc pentru ecuația

$$x^3-3x+3-9\operatorname{arctg}x=0.$$

R: Avem

$$f(x)=x^3-3x+3-9\operatorname{arctg}x,\quad x\in R$$

$$f'(x)=3x^2-3-9\frac{1}{1+x^2}=0$$

sau

$$(x^2-1)(x^2+1)-3=0,\quad x^4-4=0$$

$$f'(x)=0,\quad x_1=\sqrt{2},\quad x_2=-\sqrt{2}.$$

Formăm șirul lui Rolle

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f(x)$	$-$		A		$+$		B		$+$

cu $A=3\sqrt{2}+3-9\operatorname{arctg}(-\sqrt{2})>0$, $B=-\sqrt{2}+3-9\operatorname{arctg}\sqrt{2}<0$ deoarece $-9\operatorname{arctg}(-\sqrt{2})=9\operatorname{arctg}\sqrt{2}$ și $\frac{\pi}{4}<\operatorname{arctg}\sqrt{2}<\frac{\pi}{3}$, pentru că $f(0)=3>0$ rezultă că ecuația are o rădăcină reală negativă în intervalul $(-\infty,-\sqrt{2})$, 2 rădăcini reale pozitive, una în intervalul $(0,\sqrt{2})$ și a doua în intervalul $(\sqrt{2},+\infty)$.

9. Se dă ecuaţia

$$20 \ln(1 + x^2) - 12x^2 + x^4 + m = 0$$

se cere să i se discute, după parametrul real m, numărul rădăcinilor reale cît şi intervalele în care se găsesc.

R: Funcţia

$$f(x) = 20 \ln(1 + x^2) - 12x^2 + x^4 + m$$

este continuă şi derivabilă pe R. Avem

$$f'(x) = \frac{40x}{1 + x^2} - 24x + 4x^3$$

$$f'(x) = 0, \quad 10x + (x^3 - 6x)(1 + x^2) = 0$$

sau

$$x^5 - 5x^3 + 4x = 0$$

sau

$$x(x^4 - 5x^2 + 4) = 0$$

cu rădăcinile $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$, $x_4 = +1$, $x_5 = +2$.

Formăm şirul lui Rolle

$f(-\infty)$	$f(-2)$	$f(-1)$	$f(0)$	$f(+1)$	$f(+2)$	$f(+\infty)$
$+$	B	m	A	A	B	$+$

cu $A = 20 \ln 2 + m - 11$, $B = 20 \ln 2 + m - 32$ şi $\ln 2 = 0{,}30103 \times 2{,}30258 = 0{,}69315$. Avem aşa dar următoarea discuţie:

a) $m \in (-\infty, 11 - 20 \ln 2)$, $A < 0$, $B < 0$, $m < 0$

ecuaţia are 2 rădăcini reale, una negativă în intervalul $(-\infty, -2)$ şi a doua pozitivă în intervalul $(2, +\infty)$;

b) $m = 11 - 20 \ln 2$; ecuaţia admite rădăcinile duble $x_1 = -1$ şi $x_2 = 1$;

c) $m \in (11 - 20 \ln 2, 0)$; ecuaţia admite 6 rădăcini reale cîte una în intervalele;

$$(-\infty, -2), (-2, -1), (-1, 0), (0, +1), (1, 2), (2, +\infty);$$

d) $m = 0$; ecuaţia admite 6 rădăcini reale din care $x_1 = 0$ o rădăcină dublă şi cîte o rădăcină în intervalele

$$(-\infty, -2), (-2, -1), (1, 2), (2, +\infty);$$

e) $m \in (0, 32 - 20 \ln 2)$; ecuaţia admite 4 rădăcini reale, cîte una în intervalele

$$(-\infty, -2), (-2, -1), (1, 2), (2, +\infty);$$

f) $m = 32 - 20 \ln 2$; ecuaţia admite 2 rădăcini reale duble, $x_1 = -2$, $x_2 = 2$;

g) $m > 32 - 20 \ln 2$; ecuaţia nu admite nici o rădăcină reală.

10. Să se determine numărul rădăcinilor reale ale ecuației:

$$\frac{1}{2x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\cdots+\frac{1}{x-n}=\alpha, \quad \alpha>0.$$

R: Fie $f(x)=\frac{1}{2x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\cdots+\frac{1}{x-n}-\alpha,$

$$x\in R-\{0,1,\ldots,n\}$$

$f(x)$ este continuă și derivabilă pe orice interval de forma $(k, k+1)$, $k=0,1,\ldots,n-1$.

Calculăm

$$f'(x)=-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{(x-1)^2}-\cdots-\frac{1}{(x-n)^2}<0, \quad x\in(k,k+1)$$

deci funcția este descrescătoare pe fiecare din aceste intervale. Observăm în plus că

$$\lim_{\substack{x\to k\\ x<k}} f(x)=-\infty, \quad \lim_{\substack{x\to k\\ x>k}} f(x)=+\infty, \quad k=0,1,\ldots,n-1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\alpha, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\alpha$$

deci în fiecare din cele $n+1$ intervale funcția admite o rădăcină și pentru că numărătorul lui $f(x)$ este de grad $1+n$, rezultă că toate rădăcinile ei sînt reale.

11. Fie $P(x)$ și $Q(x)$ funcții derivabile pe I. Să se arate că între 2 rădăcini ale lui $P(x)$ pe I există o rădăcină a lui $P'(x)+P(x)\,Q'(x)$.

R: Se consideră funcția:

$$g(x)=P(x)\,e^{Q(x)}, \quad x\in I$$

care se anulează pentru rădăcinile lui $P(x)$.

Aplicînd teorema lui Rolle, rezultă că între 2 rădăcini ale lui $g(x)$ există cel puțin un punct $\xi\in I$ astfel ca:

$$g'(\xi)=(P'(\xi)+P(\xi)\,Q'(\xi))\,e^{Q(\xi)}=0.$$

12. Dacă $f(x)$ este o funcție continuă pe $[a,b]$ și de n ori derivabilă pe (a,b) și dacă $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$, atunci există $\xi\in(a,b)$ astfel ca:

$$\frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)\prod_{i>j}(x_i-x_j)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ x_0 & x_1 & \ldots\ldots & x_n \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & \ldots\ldots & x_n^{n-1} \\ f(x_0) & f(x_1) & \ldots & f(x_n) \end{vmatrix}.$$

R: Considerăm funcţia

$$F(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x & x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ x^2 & x_0^2 & x_1^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^{n-1} & x_0^{n-1} & x_k^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \\ x^n & x_0^n & x_1^n & \dots & x_n^n \\ f(x) & f(x_0) & f(x_1) & \dots & f(x_n) \end{vmatrix}, \quad x\in[a,\ b]$$

pentru care putem aplica teorema lui Rolle pe intervalele (a, x_1), (x_1, x_2) ... ... (x_{n-1}, b), deoarece $F(x)$ este continuă şi derivabilă de n ori pe (a, b), iar $F(x_0) = F(x_1) = \dots = F(x_n) = 0$.

Există deci ξ_1', ξ_2', ..., ξ_{n-1}' astfel ca $F(\xi_i') = 0$, deci

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ 2\xi_i' & x_0^2 & x_1^2 & \dots & x_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ n(\xi_i')^{n-1} & x_0^n & x_1^n & \dots & x_n^n \\ f'(\xi_i') & f(x_0) & f(x_1) & \dots & f(x_n) \end{vmatrix} = 0.$$

Aplicînd de n ori succesiv teorema lui Rolle rezultă că există $\xi\in(a, b)$ astfel ca:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & x_0 & x_1 & & x_n \\ 0 & x_0^2 & x_1^2 & & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n! & x_0^n & x_1^n & & x_n^n \\ f^{(n)}(\xi) & f(x_0) & f(x_1) & \dots & f(x_n) \end{vmatrix} = 0.$$

de unde rezultă relaţia cerută.

13. Fie $C_0 + \frac{C_1}{2} + \dots + \frac{C_{n-1}}{n} + \frac{C_n}{n+1} = 0, \quad C_0, C_1, \dots, C_n\in R.$

Să se arate că ecuaţia

$$C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots + C_{n-1}x^{n-1} + C_nx^n = 0$$

are cel puţin o rădăcină reală între 0 şi 1.

R: Să notăm $f(x) = C_0 + C_1 x + \ldots + C_{n-1}x^{n-1} + C_n x^n$.
Observăm că $f(x)$ este derivata funcției

$$g(x) = C_0 x + C_1 \frac{x^2}{2} + \ldots + C_{n-1}\frac{x^n}{n} + C_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Aplicăm teorema lui Rolle, deoarece $g(x)$ este continuă și derivabilă în $[0, 1]$ și

$$g(0) = 0, \quad g(1) = C_0 + \frac{C_1}{2} + \cdots + \frac{C_{n-1}}{n} + \frac{C_n}{n+1} = 0,$$

deci există între cele 2 rădăcini ale funcției cel puțin o rădăcină a derivatei

$$g'(\xi) = f(\xi) = 0.$$

14. Să se demonstreze că polinoamele lui Legendre

$$P_m(x) = \frac{1}{2^m \cdot m!}[(x^2 - 1)]^{(m)}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

a) verifică ecuația:

$$(1 - x^2)\, P_m''(x) - 2x\, P_m'(x) + m(m+1)\, P_m(x) = 0;$$

b) au toate rădăcinile reale cuprinse în intervalul $(-1, +1)$.
R: a) Plecăm de la egalitatea:

$$(x^2 - 1)\, u' = 2m \times u, \quad u = (x^2 - 1)^m$$

pe care o derivăm de $(m + 1)$ ori:

$$(x^2 - 1)\, u^{(m+2)} + C_{m+1}^1\, 2x u^{(m+1)} + C_{m+1}^2\, 2 \cdot u^{(m)} =$$
$$= 2m[x u^{(m+1)} + C_{m+1}^1\, u^{(m)}]$$

sau:

$$(x^2 - 1)\, u^{(m+2)} + 2x u^{(m+1)} - (m^2 + m)\, u^{(m)} = 0$$

dar:

$$u^{(m)} = [(x^2 - 1)^m]^m = 2^m\, m!\, P_m(x)$$
$$u^{(m+1)} = [(x^2 - 1)^m]^{(m+1)} = 2^m\, m!\, P_m'(x)$$
$$u^{(m+2)} = [(x^2 - 1)^m]^{(m+2)} = 2^m\, m!\, P_m''(x)$$

care conduc la

$$(x^2 - 1)\, P_m''(x) + 2x\, P_m'(x) - m(m+1)\, P_m(x) = 0.$$

b) Funcția $f(x) = (x^2 - 1)^m$, îndeplinește condițiile teoremei lui Rolle pe $[-1, +1]$, deci $f'(x)$ are un zero $x_0 \in (-1, +1)$.
Fie

$$f'(x) = 2m\, x(x^2 - 1)^{m-1}$$

$f'(x)$ îndeplinește condițiile din teorema lui Rolle pe intervalele $[-1, x_0]$, $[x_0, +1]$ deci derivata $f''(x)$ admite în fiecare din cele două subintervale cîte o rădăcină reală. Prin inducție rezultă și punctul (b).

15. Se dau funcţiile

$$f_0(x), \quad f_1(x), \ldots f_p(x), \quad x \in [a, b]$$

care îndeplinesc următoarele condiţii:

a) sînt continue pe $[a, b]$;

b) sînt derivabile pe (a, b).

Să se arate că există cel puţin cîte un $\xi \in (\alpha_k, \alpha_{k+1})$, $k = 1, \ldots, p-1$ astfel încît

$$\begin{vmatrix} f_0'(\xi) & f_1'(\xi) & \ldots\ldots\ldots & f_p'(\xi) \\ f_0(\alpha_1) & f_1(\alpha_1) & \ldots\ldots\ldots & f_p(\alpha_1) \\ f_0(\alpha_2) & f_1(\alpha_2) & \ldots\ldots\ldots & f_p(\alpha_2) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ f_0(\alpha_p) & f_1(\alpha_p) & \ldots\ldots\ldots & f_p(\alpha_p) \end{vmatrix} = 0$$

unde $a \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots \alpha_p = b$ sînt p numere reale.

R: Formăm funcţia

$$F(x) = \begin{vmatrix} f_0(x) & f_1(x) & \ldots\ldots\ldots & f_p(x) \\ f_0(\alpha_1) & f_1(\alpha_1) & \ldots\ldots\ldots & f_p(\alpha_1) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ f_0(\alpha_p) & f_1(\alpha_p) & \ldots\ldots\ldots & f_p(\alpha_p) \end{vmatrix}, \quad x \in [a, b]$$

care, conform enunţului, are următoarele proprietăţi: este continuă pe $[a, b]$ deci şi pe $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$, este derivabilă pe (a, b), deci şi pe (α_k, α_{k+1}). În plus avem

$$F(\alpha_k) = F(\alpha_{k+1}) = 0$$

prin urmare, aplicînd teorema lui Rolle, derivata $F'(x)$ se anulează în (α_k, α_{k+1}). Derivata lui $F(x)$ este

$$F'(x) = \begin{vmatrix} f_0'(x) & f_1'(x) & \ldots\ldots\ldots & f_p'(x_p) \\ f_0(\alpha_1) & f_1(\alpha_2) & \ldots\ldots\ldots & f_p(\alpha_p) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ f_0(\alpha_p) & f_1(\alpha_p) & \ldots\ldots\ldots & f_p(\alpha_p) \end{vmatrix}$$

există $\xi \in (\alpha_k, \alpha_{k+1})$ astfel încît $F'(\xi) = 0$.

16: Fie $f(x)$ o funcţie de 6 ori derivabilă pe I; fie x_1, x_2, x_3 puncte din intervalul I şi n_i, $(i = 1, 2, 3)$ numere întregi pozitive astfel încît $n_1 + n_2 + n_3 = 6$. Să presupunem că în fiecare din punctele x_i, $f^{(k)}(x_i) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n_i - 1$.

Să se arate că în intervalul (x_1, x_3) există un punct ξ cu $f^{(5)}(\xi) = 0$. Să se generalizeze.

R: Pentru a urmări raționamentul mai ușor, să luăm $n_1 = 2$, $n_2 = 1$, $n_3 = 3$.

Condițiile problemei sînt:

$$f(x_1) = f'(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f'(x_3) = f''(x_3) = 0;$$

aplicăm teorema lui Rolle succesiv pe intervalele din tabloul următor

x_1		x_2		x_3
$f(x_1)=0$		$f(x_2)=0$		$f(x_3)=($
$f'(x_1)=0$	$f'(\xi_1)=0$		$f'(\xi_2)=0$	$f'(x_3)=$
	$f''(\xi_1')=0$	$f''(\xi_2^1)=0$	$f''(\xi_3^1)=0$	$f''(x_3)=$
		$f'''(\xi_1^2)=0$	$f'''(\xi_2^2)=0$	$f'''(\xi_3^2)=0$
		$f^{IV}(\xi_1^3)=0$	$f^{IV}(\xi_2^3)=0$	
			$f^{V}(\xi)=0$	

17. Dacă f și g sînt funcții continue pe $[a, a+nh]$, $h>0$ derivabile de n ori pe $(a, a+nh)$ și $\alpha_k = (-1)^k C_n^k$, atunci există $\xi \in (a, a+nh)$ astfel ca:

$$f^{(n)}(\xi)\,(\alpha_0 g(a) + \ldots + \alpha_n g(a+nh)) = g^{(n)}(\xi)\,(\alpha_0 f(a) + \ldots + \alpha_n f(a+nh)).$$

R: Se consideră funcția:

$$\varphi(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & \ldots\ldots & x^{n-1} & g(x) & f(x) \\ 1 & a & \ldots\ldots & a^{n-1} & g(a) & f(a) \\ 1 & a+h & \ldots\ldots & (a+h)^{n-1} & g(a+h) & f(a+h) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & a+nh & \ldots\ldots & (a+nh)^{n-1} & g(a+nh) & f(a+nh) \end{vmatrix}$$

$\varphi(x)$ este continuă pe $[a, a+nh)$ este derivabilă pe $(a, a+nh)$ și $\varphi(a) = \varphi(a+h) = \ldots = \varphi(a+nh)$.

Aplicînd teorema lui Rolle de n ori există un punct $\xi \in (a, a+nh)$ astfel ca $\varphi^{(n)}(\xi) = 0$, însă

$$\varphi^{(n)}(\xi) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & g^{(n)}(\xi) & f^{(n)}(\xi) \\ 1 & a & \ldots\ldots & a^{n-1} & g(a) & f(a) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & a+nh & \ldots\ldots & (a+nh)^{n-1} & g(a+nh) & f(a+nh) \end{vmatrix}$$

Minorul elementului $f^{(n)}(\xi)$ este determinantul

$$\begin{vmatrix} 1 & a & \ldots\ldots & a^{n-1} & g(a) \\ 1 & a+h & \ldots\ldots & (a+h)^{n-1} & g(a+h) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & a+nh & \ldots\ldots & (a+nh)^{n-1} & g(a+nh) \end{vmatrix}$$

care se reduce la un determinant Vandermonde dacă scădem linia I din celelalte. Astfel, minorul lui $f^{(n)}(\xi)$ are valoarea:

$$h^{n(n-1)/2}\ 1!\ 2!\ \ldots\ (n-1)!\ [C_n^0 g(a) + \ldots + C_n^n g(a+nh)],$$

asemănător obținem pentru minorul lui $g^{(n)}(\xi)$.

Urmează că:

$$f^{(n)}(\xi)\ (C_n^0 g(a) + \ldots + C_n^n g(a+nh)) =$$
$$= g^{(n)}(\xi)\ (C_n^0 f(a) + \ldots + C_n^n f(a+nh)).$$

18. Să se arate că pentru $x > 0$,

$$\ln(1+x) > \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x}$$

R: Considerăm funcțiile

$$f(x) = (1+x)\ln(1+x) \quad \text{și} \quad g(x) = \operatorname{arctg} x$$

continue și derivabile în orice interval $[0, x]$.

Aplicăm pentru ele formula lui Cauchy și obținem pe $[0, x]$, ($x > 0$ arbitrar)

$$\frac{(x+1)\ln(1+x)}{\operatorname{arctg} x} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad 0 < c < x$$

$$f'(c) = 1 + \ln(1+c)$$

$$g'(c) = \frac{1}{1+c^2}$$

$\frac{f'(c)}{g'(c)} = (1+c^2)(1+\ln(1+c)) > 1$, deoarece $c > 0$, de aici rezultă

$$\ln(1+x) > \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x}, \quad x > 0.$$

19. Fie f o funcție definită pe $[0, \infty]$ derivabilă astfel încît $f'(x) \geqslant 0$, $x \in [0, \infty]$, $f(0) = 0$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. Să se determine $f(1)$.

R: Funcția f este continuă, crescătoare pe $[0, \infty]$ cu $f(0) = 0$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, deci e nulă pe $[0, \infty]$, anume $f(x) \equiv 0$; rezultă pentru orice $x \in (0, \infty)$, $f(x) = 0$, deci și $f(1) = 0$.

20. Se dă: $f(x)$ o funcție diferențiabilă pe $[a, b]$, în plus $f(a) = 0$ și $|f'(x)| \leqslant A\,|f(x)|$, A constant.

Să se arate că

$$f(x) = 0 \text{ pentru orice } x \in [a, b].$$

R: Fie $x_0 \in [a, b]$ și $M_0 = \sup |f(x)|$, $M_1 = \sup |f'(x)|$ $x \in [a, x_0]$.

Avem: din teorema creșterilor finite

$$|f(x)| = |f(x) - f(a)| = |f'(\xi)(x_0 - a)| \leqslant M_1 |x_0 - a| \leqslant A M_0 (x_0 - a);$$

înseamnă, $M_0 = 0$, dacă $A(x_0 - a) < 1$, adică $f(x) = 0$ pentru $x \in [a, x_0]$.

21. Să se arate că şirul

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$$

este divergent, aplicînd formula creşterilor finite funcţiei

$$y = \ln x, \quad x \in [n,\ n+1], \quad n \in N.$$

R: Putem scrie

$$\ln(n+1) - \ln n = \frac{1}{\xi}, \quad \xi \in (n,\ n+1),$$

deoarece $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{n}$, urmează

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n},$$

de unde rezultă

$$\frac{1}{2} < \ln 2 - \ln 1 < \frac{1}{1}$$

$$\frac{1}{3} < \ln 3 - \ln 2 < \frac{1}{2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$$

sau, însumînd pe coloane

$$S_{n+1} - 1 < \ln(n+1) < S_n$$

de unde obţinem imediat că

$$\lim_{n \to \infty} S_n = +\infty.$$

22. Fie $f(x)$ o funcţie continuă pentru care $f'(x)$ există într-o vecinătate a lui $x = c$. Să presupunem că există o funcţie continuă $\theta(h)$ cu $0 < \theta(h) < 1$ care satisface ecuaţia:

$$f(c+h) - f(c) = hf'[c + h\,\theta(h)].$$

Rezultă de aici că $f'(x)$ este continuă în $x = c$?

R: Avem

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \to 0} f'(c + h\,\theta(h)) = \lim_{q \to 0} f'(c+q)$$

deoarece $\theta(h)$ este pozitivă şi continuă într-un interval închis ce conţine pe zero, trebuie să ia o valoare minimă pozitivă în acest interval, astfel că: $q = h\,\theta(h) \to 0$ este echivalent cu $h \to 0$; urmează că $f'(x)$ este continuă în $x = c$.

23. Fie f o funcţie continuă pentru $x \geqslant 0$, pentru care $f'(x)$ există pentru $x > 0$, $f(0) = 0$ şi $f'(x)$ este monoton crescătoare.

Să se arate că funcţia

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}, \quad x > 0$$

este monoton crescătoare.

R: Aplicăm teorema creşterilor finite funcţiei $f(x)$ pe intervalul $[0, x]$; avem

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi) \leqslant f'(x), \quad 0 \leqslant \xi \leqslant x;$$

însă avem şi

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{x} - \frac{f(x)}{x^2} \geqslant \frac{f'(x)}{x} - \frac{f'(x)}{x} \geqslant 0$$

deci $g(x)$ este crescătoare pe $(0, \infty)$.

24. Fie f şi g funcţii diferenţiabile pe $[a, b]$ cu $g'(x) \neq 0$. Să se arate că există $c \in (a, b)$ astfel ca

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(c) - f(a)}{g(b) - g(c)}.$$

R: Fie

$$h(x) = \frac{[f(x) - f(a)]\,[g(x) - g(a)]}{g(b) - g(a)} - f(x) + f(a);$$

deoarece $g(b) \neq g(a)$, $h(x)$ este derivabilă pe $[a, b]$ şi $h(a) = h(b) = 0$.

Putem aplica teorema lui Rolle. Există cel puţin un $c \in (a, b)$ astfel ca

$$h'(c) = \frac{f'(c)}{g(b) - g(a)}\,(g(c) - g(a)) + \frac{(f(c) - f(a))\,g'(c)}{g(b) - g(a)} - f'(c) = 0,$$

de unde rezultă relaţia cerută.

25. Aplicînd teorema creşterilor finite funcţiei $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha-1}}$, $x > 0$ să se stabilească natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \neq 1$.

R: Aplicăm teorema lui Lagrange pe $[n, n+1]$, deoarece $f(x)$ este continuă şi derivabilă. Obţinem

$$\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} = (1 - \alpha)\,\frac{1}{\xi_n^\alpha}; \quad \xi_n \in (n, n+1).$$

Dar: $n^\alpha < \xi_n^\alpha < (n+1)^\alpha$, deci:

$$(1 - \alpha)\,\frac{1}{(n+1)^\alpha} < \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} < (1 - \alpha)\,\frac{1}{n^\alpha}.$$

Pentru $n = 1, 2, ..., p$, obținem:

$$\frac{1-\alpha}{2^\alpha} < \frac{1}{2^{\alpha-1}} - \frac{1}{4^{\alpha-1}} < (1-\alpha)$$

$$\frac{1-\alpha}{3^\alpha} < \frac{1}{3^{\alpha-1}} - \frac{1}{2^{\alpha-1}} < \frac{1-\alpha}{2^\alpha}$$

$$\frac{1-\alpha}{(p+1)^\alpha} < \frac{1}{(p+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{p^{\alpha-1}} < (1-\alpha)\frac{1}{p^\alpha}$$

$$(1-\alpha)\left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + ... + \frac{1}{(p+1)^\alpha}\right) <$$

$$< \frac{1}{(p+1)^{\alpha-1}} < (1-\alpha)\left(1 + \frac{1}{2^\alpha} + ... + \frac{1}{p^\alpha}\right),$$

Să notăm cu $S_p = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + ... + \frac{1}{p^\alpha}$.

Obținem:

$$(1-\alpha)(S_{p+1} - 1) < \frac{1}{(p+1)^{\alpha-1}} < (1-\alpha) S_p$$

pentru $\alpha < 1$, $1 - \alpha > 0$ și $S_p > \frac{1}{(1-\alpha)(p+1)^{\alpha-1}}$

Dar $\lim\limits_{p\to\infty} \frac{1}{(p+1)^{\alpha-1}} = +\infty$ și deci $\lim\limits_{p\to\infty} S_p = +\infty$.

seria este divergentă.

Pentru $\alpha > 1$,

$$0 < S_p < \frac{1}{(1-\alpha)(p+1)^{\alpha-1}}$$

și cum $\lim\limits_{p\to\infty} \frac{1}{(p+1)^{\alpha-1}} = 0$, $\lim\limits_{p\to\infty} S_p = 0$, deci seria este convergentă.

26. Dacă $f(t)$ este o funcție crescătoare pentru $t \in [0, b]$, este derivabilă și $f'(t)$ este descrescătoare pentru $t \in (0, b]$ atunci seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} f'\left(\frac{b}{n}\right)$$

este convergentă.

R: Fie $\frac{b}{n+1} < \frac{b}{n}$ și să aplicăm formula creșterilor finite funcției $f(t)$ pe $\left[\frac{b}{n+1}, \frac{b}{n}\right]$:

$$f\left(\frac{b}{n}\right) - f\left(\frac{b}{n+1}\right) = f'(\xi)\left(\frac{b}{n} - \frac{b}{n+1}\right), \quad \frac{b}{n+1} \leqslant \xi \leqslant \frac{b}{n}$$

Deoarece $f(t)$ este crescătoare, urmează că

$$f\left(\frac{b}{n}\right) - f\left(\frac{b}{n+1}\right) \geqslant 0$$

și pentru că $f'(t)$ este descrescătoare

$$f'(b) < f'\left(\frac{b}{n}\right) \leqslant f'(\xi) \leqslant f'\left(\frac{b}{n+1}\right)$$

prin urmare

$$f'\left(\frac{b}{n}\right)\frac{b}{n(n+1)} \leqslant f\left(\frac{b}{n}\right) - f\left(\frac{b}{n+1}\right)$$

De aici rezultă că:

$$f'\left(\frac{b}{n}\right)\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{n+1}{nb}\left(f\left(\frac{b}{n}\right) - f\left(\frac{b}{n+1}\right)\right)$$

sau, încă

$$f'\left(\frac{b}{n}\right)\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{b}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(f\left(\frac{b}{n}\right) - f\left(\frac{b}{n+1}\right)\right) \leqslant \frac{2}{b}\left(f\left(\frac{b}{n} - f\left(\frac{b}{n+1}\right)\right)\right)$$

Deoarece funcția f este crescătoare, f' este pozitivă, deci seria dată este o serie cu termeni pozitivi.

Folosim criteriul comparației cu seria:

$$u_n = \frac{2}{b}\left(f\left(\frac{b}{n}\right) - f\left(\frac{b}{n+1}\right)\right)$$

Aceasta are suma parțială

$$S_n = u_1 + \ldots + u_n = \frac{2}{b}\left[f\left(\frac{b}{1}\right) - f\left(\frac{b}{2}\right)\right) + \left(f\left(\frac{b}{2}\right) - f\left(\frac{b}{3}\right)\right) + \ldots$$

$$\ldots + \left(f\left(\frac{b}{n}\right) - f\left(\frac{b}{n+1}\right)\right)\Big] = \frac{2}{b}\left[f(b) - f\left(\frac{b}{n+1}\right)\right]$$

cînd $n \to \infty$, $f\left(\frac{b}{n+1}\right) \to f(0)$ care este finit, deci $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{2}{b}(f(b) - f(0))$ și seria de comparație este convergentă.

27. a) Fie $f : R \to R$ astfel că $f'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in R$.

Să se arate că f este biunivocă pe R:

b) Fie $f : R^2 \to R^2$, $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$.

Să se arate că f nu este biunivocă deși

$$\frac{D(f_1, f_2)}{D(x, y)} \neq 0, \text{ unde } f = (f_1, f_2)$$

R: a) rezultă din teorema creșterilor finite

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi)(x_1 - x_2), \quad \xi \in (x_1, x_2)$$

și de aici dacă $x_1 = x_2 \to f(x_1) = f(x_2)$ și reciproc

b) $$\frac{D(f_1, f_2)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} +e^x \cos y & e^x \sin y \\ -e^x \sin y & e^x \cos y \end{vmatrix} = e^{2x} \neq 0$$

dar la toate punctele din $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(0, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ le corespund același punct (0, 1).

28. Fie $m_k(\Im)$ marginea inferioară a funcției $|f^{(k)}(t)|$ în intervalul $\Im \subset (-1, 1)$. Să se arate că dacă $-1 < a < b < c < d < 1$ sînt 4 puncte din $\Im$, și notăm $\Im_1 = (a, b)$, $\Im_2 = [b, c]$, $\Im_3 = (c, d)$ și $\Im = (a, d)$ atunci

$$m_k(\Im) \leqslant \frac{1}{(c-b)} (m_{k-1}(\Im_1) + m_{k-1}(\Im_3))$$

R: Să considerăm punctele $t_1 = b - \varepsilon$, $t_2 = c + \varepsilon$ și să aplicăm teorema creșterilor finite funcției $f^{(k-1)}(t)$ obținem

$$f^{(k-1)}(t_1) - f^{(k-1)}(t_2) = (t_1 - t_2) f^{(k)}(\tau), \quad t_1 < \tau < t_2$$

rezultă

(α) $$|t_1 - t_2| \, |f^{(k)}(\tau)| \leqslant |f^{(k-1)}(t_1)| + |f^{(k-1)}(t_2)|$$

însă

$$t_2 - t_1 = c - b + 2\varepsilon > c - b, \quad \text{iar} \quad |f^{(k)}(\tau)| > m_k(\Im)$$

deoarece $\tau \in [b, c]$; înlocuite în α ne dă neegalitatea din enunț.

29. Să se calculeze

$$\lim_{x \to 0} (1 + \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx)^{\frac{1}{x}}$$

R: Nedeterminarea este de forma 1^∞. Notăm

$$y = (1 + \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx)^{\frac{1}{x}}$$

deci

$$\ln y = \frac{1}{x} \ln(1 + \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx)$$

Cînd $x \to 0$ nedeterminarea este de forma $\frac{0}{0}$. Aplicăm regula lui l'Hospital

$$\lim_{x \to 0} \ln y = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x + 2 \cos 2x + \ldots + n \cos nx}{1 + \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx} = \frac{n(n+1)}{2}$$

deci

$$\lim_{x \to 0} y = e^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

30. Să se calculeze

$$\lim_{x \to 0} \left(1 + \operatorname{arctg} \frac{x}{x^2 + 1}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$$

R: Cînd $x \to 0$, nedeterminarea este de forma 1^{∞}. Dacă notăm

$$y = \left(1 + \operatorname{arctg} \frac{x}{x^2 + 1}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$$

avem

$$\ln y = \frac{\ln\left(1 + \operatorname{arctg} \dfrac{x}{x^2 + 1}\right)}{\sin x}$$

$$\lim_{x \to 0} \ln y = \lim_{x \to 0} \frac{\ln\left(1 + \operatorname{arctg} \dfrac{x}{x^2 + 1}\right)}{\sin x}$$

Nedeterminarea este de forma $\frac{0}{0}$. Aplicăm regula lui **l'Hospital**

$$\lim_{x \to 0} \ln y = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} \frac{\dfrac{x^2 + 1 - 2x^2}{(1 + x^2)^2}}{1 + \left(\dfrac{x}{x^2 + 1}\right)^2} = 1$$

deci

$$\lim_{x \to 0} \left(1 + \operatorname{arctg} \frac{x}{1 + x^2}\right)^{\frac{1}{\sin x}} = e.$$

31. Folosind identitatea

$$\frac{1}{x^2 + 1} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x - i} - \frac{1}{x + i}\right)$$

şi faptul că funcţiile $u = ax + b$, $f(u)$, unde $a,\ b \in C,\ x \in R,\ f \in C^{(1)}$ au derivatele $u' = a$, $f'(u) \cdot a$, să se arate că

$$\left(\frac{1}{1 + x^2}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(1 + x^2)^{\frac{n+1}{2}}} [\sin (n + 1) \operatorname{arctg} x], \quad x \in R$$

R: Avem

$$\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)' = \frac{-1}{2i}\left[\frac{1}{(x - i)^2} - \frac{1}{(x + i)^2}\right]$$

şi, în general

$$\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{2i} n!\left[\frac{1}{(x - i)^{n+1}} - \frac{1}{(x + i)^{n+1}}\right]$$

însă

$$\frac{1}{(x - i)^{n+1}} = \frac{(x + i)^{n+1}}{(x^2 + 1)^{n+1}} = (x^2 + 1)^{-\frac{n+1}{2}} (\cos \alpha + i \sin \alpha)^{n+1} =$$

$$= (x^2 + 1)^{-\frac{n+1}{2}} (\cos (n + 1) \alpha + i \sin (n + 1) \alpha);$$

în mod analog obținem

$$\frac{1}{(x+i)^{n+1}} = (x^2+1)^{-\frac{n+1}{2}} (\cos\alpha + i\sin\alpha)^{-(n+1)} =$$

$$= (x^2+1)^{-\frac{n+1}{2}} [\cos(n+1)\alpha - i\sin(n+1)\alpha]$$

din care rezultă expresia derivatei din enunț.

Din relația obținută, avem și

$$\frac{d^n}{dx^n}(\operatorname{arctg} x) = (-1)^{n-1}(n-1)! \frac{\sin(n \operatorname{arctg} x)}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}$$

32. Să se calculeze derivata de ordinul „n" a funcției $y(x) = \operatorname{arctg} x$ în punctul $x = 0$.

R: $y'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $y''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$;

$$y''(x) = -\frac{2x}{1+x^2} y'(x) \text{ sau}$$

$$(1+x^2)\, y'' = -2\, xy'$$

Derivăm această relație membru cu membru de n ori și obținem

$$y^{(n+2)}(1+x^2) + C_n^1\, 2xy^{(n+1)} + C_n^2\, 2y^{(n)} =$$

$$= -2[y^{(n+1)}x + C_n^1\, y^{(n)}]$$

Pentru $x = 0$, rezultă relația de recurență:

$$y^{(n+2)}(0) = -n(n+1)\, y^{(n)}(0)$$

de unde

$$y^{(2k)}(0) = 0 \quad \text{și} \quad y^{(2k+1)}(0) = (-1)^k (2k)!$$

Același rezultat se obține și din problema nr. 31.

33. Să se arate că pentru orice $k \geqslant 1$, întreg

$$\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}\left(\frac{1}{e^t-1}\right) = (-1)^{k-1} \sum_{r=1}^{k} \frac{\gamma_k(r)}{(e^t-1)^r}$$

unde constantele $\gamma_k(r)$ sînt toate pozitive și satisfac relația:

$$\gamma_k(r) = \sum_{\nu=0}^{r-1} (-1)^\nu\, C_{r-1}^\nu (r-\nu)^{k-1}$$

R: Deoarece

$$\gamma_n(r) = \left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\{e^x(e^x-1)^{r-1}\}\right]_{x=0}, \quad 1 \leqslant r \leqslant n$$

găsim că

$$\gamma_{n+1}(r) = r\,\gamma_n(r) + (r-1)\,\gamma_n(r-1);$$

pentru că

$$e^x(e^x-1)^{r-1} = (e^x-1)^r - (e^x-1)^{r-1};$$

cu $\gamma_n(n) = (n-1)!$ și $\gamma_n(n+1) = 0$.

Demonstrăm prin inducție: relația este adevărată pentru $k = 1$; să presupunem că formula este adevărată pentru $k = 1, 2, \ldots, n$; atunci:

$$(-1)^n \sum_{r=1}^{n+1} \frac{\gamma_{n+1}(r)}{(e^u-1)^r} = (-1)^n \left[\sum_{r=1}^{n} \frac{r\,\gamma_n(r)}{(e^u-1)^r} + \sum_{r=1}^{n} \frac{r\,\gamma_n(r)}{(e^u-1)^{r+1}}\right] =$$

$$= (-1)^n \sum_{r=1}^{n} \frac{e^u\, r\,\gamma_n(r)}{(e^u-1)^{r+1}} \frac{d}{du}\left[(-1)^{n-1} \sum_{r=1}^{n} \frac{\gamma_n(r)}{(e^u-1)^r}\right] = \frac{d^n}{du^n}\left(\frac{1}{e^u-1}\right)$$

deci este adevărată și pentru $k = n+1$.

34. Să se determine valoarea maximă a funcției

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x}e^{-x}} + e^{-xe^{-\frac{1}{x}}}, \quad x \in (0, \infty).$$

R: Deoarece $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$, putem considera numai intervalul $(1, \infty)$.

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x}e^{-x}}\left(\frac{1}{x^2}e^{-x} + \frac{1}{x}e^{-x}\right) + e^{-xe^{-\frac{1}{x}}}\left(-e^{-\frac{1}{x}} - \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}\right)$$

sau

$$f'(x) = \frac{x+1}{x^2} e^{-x-\frac{1}{x}e^{-x}} - \frac{x+1}{x} e^{-\frac{1}{x}-xe^{-\frac{1}{x}}}$$

se observă că $f'(x) = 0$ pentru $x = 1$.

Să arătăm că $f'(x) < 0$ pentru $x > 1$; adică

$$e^{-x-\frac{1}{x}e^{-x}} < x\, e^{-\frac{1}{x}-xe^{-\frac{1}{x}}}$$

neegalitatea se menține dacă logaritmăm; obținem

$$-x - \frac{1}{x}e^{-x} < \ln x - \frac{1}{x} - x e^{-\frac{1}{x}}$$

Să notăm

$$g(x) = \ln x + x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x}e^{-x} - x e^{-\frac{1}{x}}$$

și să arătăm că $g(x) > 0$ pentru $x \in (1, \infty)$.

Se observă că $g(1) = 0$. Avem şi

$$g'(x) = \frac{1}{x} + 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}e^{-x} - \frac{1}{x^2}e^{-x} - e^{-\frac{1}{x}} - \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}};$$

şi ţinem seama că

$$e^x > 1 + x, \quad e^{-\frac{1}{x}} < 1, \quad \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}} < \frac{1}{x}$$

şi

$$\frac{1}{x^2}e^{-x} + \frac{1}{x}e^{-x} < \frac{1}{x^2},$$

de unde obţinem

$$\frac{1}{x^2}e^{-x} + \frac{1}{x}e^{-x} + e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}} < \frac{1}{x^2} + 1 + \frac{1}{x}$$

Rezultă $g(x) > 0$, deci $f'(x) < 0$, deci $f(1)$ este un punct de maxim.

35. Fie p şi q numere reale mai mari decît 1 astfel ca

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Să se arate că pentru x şi y numere pozitive

$$xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

R: Căutăm extremele funcţiei

$$\varphi(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy, \quad x \in R^+, \quad y \in R^+$$

$$\varphi'(x) = x^{p-1} - y = 0, \quad x^{p-1} = y; \quad x = y^{\frac{1}{p-1}}$$

$$\varphi''(x) = (p-1)\,x^{p-2} \text{ şi pentru } x = y^{\frac{1}{p-1}}$$

$$\varphi''(y^{\frac{1}{p-1}}) = (p-1)\,y^{\frac{p-2}{p-1}} = \frac{p}{q}\,y^{\frac{q-p}{q}} > 0$$

deci $x = y^{\frac{1}{p-1}}$ este un punct de minim. Valoarea minimă este

$$\varphi(y^{\frac{1}{p-1}}) = \frac{y^{\frac{p}{p-1}}}{p} + \frac{y^p}{q} - y^{1+\frac{1}{p-q}} = y^q\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) - y^q = 0$$

şi astfel $\varphi(x) \geqslant 0$.

Observaţie: Pentru $p = q = 2$ se obţine inegalitatea cunoscută

$$xy \leqslant \frac{x^2 + y^2}{2}$$

36. Să se arate că

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{i}\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_i a_j}{i+j-1}$$

R: Fie

$$f(x)=\frac{1}{x}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i x^i/i\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_i a_j}{i+j-1}$$

$f(0+)=0$ şi $f'(x)=$

$$=-\left[\sum_{i=1}^{n}(i-1)\,a_i x^{i-1}/i\right]^2\leqslant 0,\quad x>0.$$

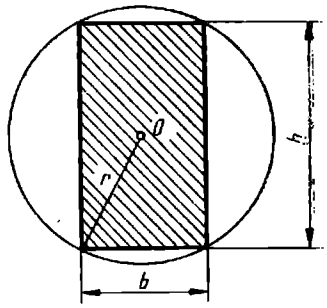

Fig. 5

Astfel: $f(1)\leqslant f(0+)$ cu egalitate pentru $a_2=a_3\ldots=a_n=0$.

37. O grindă de înălţime h şi lăţime b (figura 5) supusă la încovoiere, are rezistenţa proporţională cu bh^2. Se cere să se taie dintr-un buştean circular de rază r o grindă de rezistenţa maximă la încovoiere.

R: Rezistenţa grinzii este dată de

$$\sigma=kbh^2,\quad k=\text{const.};$$

avem

$$b^2+h^2=4r^2$$

deci

$$\sigma(b)=kb(4r^2-b^2)$$

$$\sigma'(b)=k(4r^2-b^2)-2kb^2=k(4r^2-3b^2)$$

$$\sigma'(b)=0,\quad b=\frac{2}{\sqrt{3}}r,\quad h=2\sqrt{\frac{2}{3}}r$$

$$\sigma''(b)=-3\,kb<0;\ \text{pentru } b=\frac{2}{\sqrt{3}}r,\quad h=2\sqrt{\frac{2}{3}}r$$

rezistenţa grinzii este maximă.

38. Să se studieze extremele funcţiei $f(x)=x^n\cdot\sin x$.

R: Punctele staţionare sînt soluţii ale ecuaţiei

$$x^{n-1}(x\cos x+n\sin x)=0$$

Obţinem $x=0$ şi alte soluţii date de ecuaţia

$$x\cos x+n\sin x=0$$

care este echivalentă cu $\operatorname{tg}x=-\frac{x}{n}$. (Rezolvarea grafică a ecuaţiei indică rădăcinile $x_k'=\alpha+k\pi$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, $x_k''=-\alpha+k\pi$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$).

Studiem semnul derivatei a doua în aceste puncte staţionare:

$$f''(x)=(n-1)\,x^{n-2}(x\cos x+n\sin x)+x^{n-1}(\cos x-x\sin x+$$
$$+n\cos x)=x^{n-2}[2nx\cos x+(n^2-n-x^2)\sin x]$$

$$f''(x_k')=\frac{(x_k')^{n-1}(n^2+n+x^2)}{n}\cos x_k'<0$$

deoarece $x_k' > 0$, $\cos x_k' < 0$, deci punctele x_k' sînt puncte de maxim

$$f''(x_k'') = \frac{(x_k'')^{n-1}(n^2+n+x^2)}{n} \cos x_k'' \quad \begin{cases} >0 & n \text{ par} \\ <0 & n \text{ impar} \end{cases}$$

deoarece $x_k'' < 0$ și $\cos x_k'' < 0$.

Deci pentru n par x_k'' sînt puncte de minim, iar pentru n impar x_k'' sînt puncte de maxim.

Pentru a vedea dacă $x = 0$ este punct de extrem, calculăm $f^{(n)}(0)$.

$$f^{(n)}(x) = x^n \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + n\,C_n^1 x^{n-1} \sin\left(x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right) + \ldots$$

$$\ldots + C_n^k n(n-1)\ldots(n-k) \sin\left(x + \frac{(n-k)\pi}{2}\right) +$$

$$+ n!\, x \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + n! \sin x$$

$$f^{(n)}(0) = 0, \quad f^{(n-1)}(0) = 0, \ldots, f'(0) = 0$$

$$f^{(n+1)}(0) = n!$$

deci, pentru n = impar, punctul $x = 0$ este un punct de minim.

39. Dintr-o placă de tablă circulară de rază R să se scoată un sector astfel ca din porțiunea rămasă să se poată confecționa o pîlnie de capacitate maximă.

R: Dacă x este unghiul la centru al sectorului scos, aria acestui sector este $\frac{xR^2}{2}$ iar lungimea arcului sectorului xR (x în radiani). Scriind aria suprafeței pîlniei în două moduri diferite (figura 6, a), și b)), obținem relația între r și x.

$$\frac{2\pi - x}{2} R^2 = \pi r R, \quad r = \frac{(2\pi - x)R}{2\pi}$$

Volumul $V(x)$ al pîlniei este

$$V(x) = \frac{\pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2}}{3} = \frac{R^3(2\pi - x)^2 \sqrt{4\pi x - x^2}}{24\pi^2}, \quad 0 \leqslant x < 2\pi$$

derivata lui V este

$$V'(x) = \frac{-2(2\pi - x) R^3 \sqrt{4\pi x - x^2}}{24\pi^2} + \frac{(2\pi - x)^3 R^3}{24\pi^2 \sqrt{4\pi x - x^2}} =$$

$$= \frac{(2\pi - x) R^3}{24\pi^2} \frac{1}{\sqrt{4\pi x - x^2}} (3x^2 - 12\pi x + 4\pi^2)$$

$$V'(x) = 0, \quad x_1 = 2\pi, \quad x_2 = 2\pi\left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right), \quad x_3 = 2\pi\left(1 + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

$x_1 = 2\pi$, $V = 0$, minim, $x_2 = 2\pi\left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ un maxim dat de

$$V_{max} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}} R^3.$$

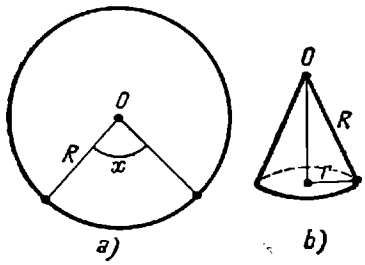

Fig. 6

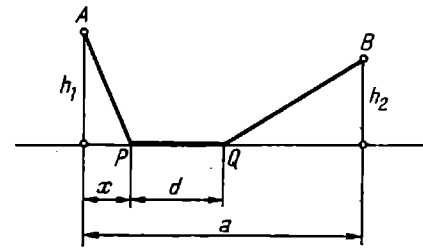

Fig. 7

40. Să se găsească traseul cel mai economic al unei căi ferate care unește două orașe A și B, dacă se impune ca pe o distanță d să meargă paralel cu o șosea existentă (figura 7).

R: Cu datele din figura 7 avem

$$t(x) = AP + PQ + QB.$$

$$AP = \sqrt{h_1^2 + x^2}, \quad QB = \sqrt{h_2^2 + (a - d - x)^2}$$

deci

$$t(x) = d + \sqrt{h_1^2 + x^2} + \sqrt{h_2^2 + (a - t - x)^2},$$

minimum este dat pentru valorile lui x pentru care $t'(x) = 0$; avem

$$t'(x) = \frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{a - t - x}{\sqrt{h_2^2 + (a - t - x)^2}}$$

$$t'(x) = 0, \quad x = \pm \frac{h_1(a - d)}{h_2 \pm h_1}$$

pentru $x = \frac{h_1(a - d)}{h_1 + h_2}$ avem un minim deoarece $t''(x) = 0$.

$$t_{\min} = d + h_1 \sqrt{\frac{(a - d)^2}{(h_1 + h_2)^2} + 1} + h_2 \sqrt{\frac{(a - d)^2}{(h_1 + h_2)^2} + 1}$$

sau

$$t_{\min} = d + \sqrt{(a - d)^2 + (h_1 + h_2)^2}.$$

41. Două drepte D_1 și D_2 care se întîlnesc în punctul P și fac între ele unghiul θ, sînt traseele a două vagoane de viteze constante u și v. Dacă la timpul $t = 0$ sau la distanțele a, respectiv b de punctul P să se determine momentul cînd vor fi la distanța minimă între ele (figura 8).

R: Avem

$$d^2(t) = (a + ut)^2 + (b + vt)^2 - 2(a + ut)(b + vt)\cos\theta$$

deci

$$d'(t) = \frac{1}{2d(t)} [2u(a + ut) + 2v(b + vt) - 2\cos\theta\,(v(a + ut) + u(b + vt))]$$

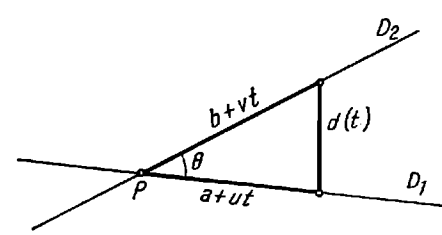

Fig. 8

$d(t)$ este minim pentru t_0 cu $d'(t_0) = 0$, dat de

$$t_0 = \frac{(va + ub)\cos\theta - (au + vb)}{u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta}$$

deoarece $d'(t) < 0$, $t < t_0$, $d'(t) > 0$, $t > t_0$. Distanța minimă între cele două vagoane este dată de

$$d_{\min} = \frac{|av - bu|\sin\theta}{\sqrt{u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta}}$$

42. Fie $f(x)$ mărginită și $f'(x)$, $f''(x)$ continue și mărginite pe $(-\infty, \infty)$. Fie $M_j = \sup_{-\infty<x<\infty} |f^{(j)}(x)|$, $j = 0, 1, 2$.

Să se arate că:

$$M_1^2 \leqslant 4 M_0 M_2$$

R: Fie $x_0 \in (-\infty, \infty)$. Dezvoltăm funcția $f(x)$ în serie Taylor în jurul punctului x_0. Obținem:

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + f''(\xi)\frac{(x - x_0)^2}{2}$$

cu

$$|\xi - x_0| < |x - x_0|$$

Ținînd seama că $-M_j \leqslant f^{(j)}(x_0) \leqslant M_j$, $j = 0,1$ și $-M_2 \leqslant f''(\xi) \leqslant M_2$, rezultă

$$2M_0 \geqslant f(x) - f(x_0) \geqslant f'(x_0)(x - x_0) - \frac{M_2}{2}(x - x_0)^2 \geqslant$$

$$\geqslant -M_1(x - x_0) - \frac{M_2}{2}(x - x_0)^2$$

de aici urmează

$$\frac{M_2}{2}(x - x_0)^2 + M_1(x - x_0) + 2M_0 \geqslant 0$$

și deoarece independent de x și x_0 inegalitatea trebuie să fie satisfăcută

$$M_1^2 - 4M_2M_0 \leqslant 0.$$

43. Fie f o funcție de două ori derivabilă pe $(0, \infty)$, f'' mărginită pe $(0, \infty)$ și $f(x) \to 0$ pentru $x \to \infty$. Să se arate că $f'(x) \to 0$ pentru $x \to \infty$.

R: f îndeplinește condițiile din problema precedentă pe $(0,\infty)$ aplicăm raționamentul din problema precedentă:

$$M_2(x - x_0)^2 - 2f'(x_0)(x - x_0) + 2(f(x) - f(x_0)) \geqslant 0$$

urmează

$$f'^2(x_0) \leqslant 2(f(x) - f(x_0))M_2;$$

să notăm $x = x_0 + h$:

$$f'^2(x_0) \leqslant 2M_2(f(x_0 + h) - f(x_0))$$

cînd $x_0 \to \infty$ obținem

$$\lim_{x_0 \to \infty} f'^2(x_0) = 0.$$

44. Funcția $f(x)$: $[0, \infty)$ este indefinit derivabilă și

$$(-1)^k f^{(k)}(x) \geqslant 0, \; k = 0, \; 1, \; 2, \ldots$$

Să se arate că funcția $g(x) = \frac{1 + f(x)}{x}$ are proprietatea

$$(-1)^k g^{(k)}(x) \geqslant 0$$

R: Calculăm derivata de ordinul (k) pentru funcția $g(x)$. Obținem:

$$g^{(k)}(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{(k)} + \left(\frac{f(x)}{x}\right)^{(k)}$$

Pentru funcția $h_1(x) = \frac{1}{x}$, obținem prin recurență $h_1'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $h_1''(x) = \frac{2}{x^3}$, ..., $h_1^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{k!}{x^{k+1}}$.

Pentru cel de al doilea termen din expresia lui $g^{(k)}(x)$, folosim formula lui Leibniz pentru derivata de ordinul n a unui produs de două funcții:

$$g^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{k!}{x^{k+1}} + f^{(k)}(x) \frac{1}{x} + \ldots + C_k^p f^{(k-p)}(x)(-1)^p \frac{p!}{x^{p+1}} + \cdots +$$

$$+ \frac{f(x)(-1)^k k!}{x^{k+1}}$$

urmează

$$(-1)^k g^{(k)}(x) = \frac{k!}{x^{k+1}} + (-1)^k f^{(k)}(x) \quad \frac{1}{x} + \cdots +$$

$$+ C_k^p f^{(k-p)}(x)(-1)^{k-p} \frac{p!}{x^{p+1}} + \cdots + \frac{f(x)k!}{x^{p+1}} \geqslant 0$$

deoarece $(-1)^k f^{(k)}(x) \geqslant 0$ și $\frac{1}{x^k} \geqslant 0$.

45. Fie $f(x)$ o funcție reală de k ori derivabilă pe, $I \subset R$. Să presupunem că pentru orice număr real r,

$$\lim_{x \to \infty} x^r f(x) = 0 \quad \text{și} \quad \lim_{x \to \infty} x^r f^{(k)}(x) = 0$$

Să se arate că:

$$\lim_{x \to \infty} x^r f^{(j)}(x) = 0, \quad 0 \leqslant j \leqslant k$$

R: Dezvoltăm funcția $f(x + j)$, $1 \leqslant j \leqslant k$, în jurul punctului x după formula lui Taylor; obținem:

$$f(x + j) = f(x) + \frac{j}{1!} f'(x) + \frac{j^2 f''(x)}{2!} + \cdots + \frac{j^{k-1} f^{(k-1)}(x)}{(k-1)!} + j^k \frac{f^{(k)}(\theta_j)}{k!},$$

$$x < \theta_j < x + j$$

Cînd j ia valorile 1, 2, ... k relația de mai sus ne conduce la un sistem de k ecuații liniare în necunoscutele $f(x)$, $f'(x)$, ... $f^{(k-1)}(x)$.

Determinantul coeficienţilor necunoscutelor este:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \dots & \frac{1}{(k-1)!} \\ 1 & \frac{2}{1!} & \frac{2^2}{2!} & \dots & \frac{2^{k-1}}{(k-1)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \frac{k}{1!} & \frac{k^2}{2!} & \dots & \frac{k^{k-1}}{(k-1)!} \end{vmatrix} = \frac{1}{1!\ 2! \dots (k-1)!} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2^2 & \dots & 2^{k-1} \\ 3 & 3^2 & \dots & 3^{k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k & k^2 & \dots & k^{k-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

În baza regulii lui Cramer, sistemul are o soluţie unică şi rezultă astfel că $f^{(j)}(x)$ este o combinaţie liniară de $f(x+1), f(x+2), \dots, f(x+k), f^{(k)}(\theta_1), \dots f^{(k)}(\theta_k)$. Deoarece pentru $x < \xi < x + k$

$$\lim_{x\to\infty} x^r f(\xi) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^r}{\xi^r}\, \xi^r f(\xi) = 0$$

rezultă că $\lim\limits_{x\to\infty} x^r f^{(j)}(x) = 0$.

46. Să se calculeze $\sqrt[5]{250}$ cu 5 zecimale exacte. Să se evalueze eroarea comisă.

R: Fie $a = 3^5 = 243$; aplicăm formula lui Taylor funcţiei $f(x) = \sqrt[5]{x}$ în jurul lui a

$$x^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{1}{5}} + \frac{x-a}{5}\, a^{-\frac{4}{5}} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} 4 \dots (5n-6)}{5^n \cdot n!}\, a^{-\frac{5n-1}{5}} (x-a)^n + \\ + R_n(x)$$

cu

$$R_n(x) = \frac{(-1)^n 4 \cdot 9 \dots (5n-1)}{5^{n+1}(n+1)!}\, \xi^{-\frac{5n+4}{5}} (x-a)^{n+1}$$

unde $a \leqslant \xi \leqslant x$.

Pentru $a = 3^5$ trebuie ca: $243 \leqslant \xi \leqslant 250$, $\frac{1}{\xi} \leqslant \frac{1}{3^5}$ şi astfel

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{4 \cdot 9 \dots (5n-1)}{5^{n+1}(n+1)!} \cdot \frac{7^{n+1}}{3^{5n+4}} \leqslant \frac{1}{10^5}$$

inegalitatea adevărată pentru $n = 2$, deci

$$\sqrt[5]{250} \sim 3 + \frac{7}{5} \cdot \frac{1}{3^4} - \frac{7^2 \cdot 4}{5^2 \cdot 2!} \cdot \frac{1}{3^9}$$

47. Să se stabilească şi să se figureze mulţimea de definiţie a funcţiei

$$u(x, y, z) = \ln(-1 - x^2 - y^2 + z^2)$$

şi apoi să se determine suprafeţele de nivel ale funcţiei u.

R: Trebuie ca $-1 - x^2 - y^2 + z^2 > 0$, de unde rezultă

$$x^2 + y^2 < z^2 - 1$$

Punctele pentru care $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ sînt situate pe suprafaţa hiperboloidului cu două pînze din figura 9.

Funcţia $u(x, y, z)$ este definită în punctele interioare ale hiperboloidului cu două pînze.

Ecuaţia suprafeţelor de nivel este:

$$\ln(-1 - x^2 - y^2 + z^2) = k, \quad k \in R$$

$$-1 - x^2 - y^2 + z^2 = e^k,$$

$$x^2 + y^2 - z^2 = -1 - e^k$$

şi reprezintă hiperboloizi cu două pînze situaţi în interiorul suprafeţei $x^2 + y^2 - z^2 = -1$.

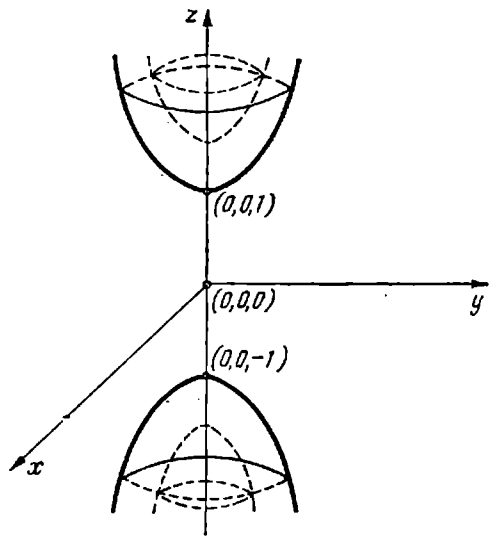

Fig. 9

48. Să se calculeze diferenţiala de ordinul doi a funcţiei

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{dacă } x = y = 0 \end{cases}$$

în punctul (0, 0).

R: Calculăm derivatele parţiale de ordinul II în origine. Obţinem

$$f'_y(x, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(x, y) - f(x, 0)}{y} = \begin{cases} x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$f'_x(0, y) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x, y) - f(0, y)}{x} = \begin{cases} -y, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

$$f''_{xy}(0, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{f'_x(0, y) - f'_x(0, 0)}{y} = -1$$

$$f''_{yx}(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{f'_y(x, 0) - f'_y(0, 0)}{x} = 1$$

$$f''_{x^2}(0, 0) = 0 = f''_{y^2}(0, 0).$$

În acest caz,

$$d^2 f = -dx\,dy + dy\,dx = 0$$

49. Definim funcţia $f : R^2 \to R$ prin:

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \quad , & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Să se arate că $\dfrac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x \partial y} \neq \dfrac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial y \partial x}$

R: Să calculăm $\dfrac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x \partial y}$:

$$\frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x \partial y} = \lim_{y \to 0} \frac{\dfrac{\partial f(0, y)}{\partial x} - \dfrac{\partial f(0, 0)}{\partial x}}{y}$$

$$\frac{\partial f(0, y)}{\partial x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x, y) - f(0, y)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - 0}{x} = -y$$

şi deci

$$\frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x \partial y} = -1$$

La fel

$$\frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial y \partial x} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{\partial f(x, 0)}{\partial y} - \dfrac{\partial f(0, 0)}{\partial y}}{x}$$

unde

$$\frac{\partial f(x, 0)}{\partial y} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x, y) - f(x, 0)}{y} = x$$

$$\frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial y \partial x} = 1$$

50. Fie $f(x, y)$ definită în $D \subset R^2 \to R$ şi să presupunem că există $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}}(a, x)$, $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}}(x, b)$ pentru orice n şi k şi orice punct $(a, b) \in D$. Rezultă de aici că f este continuă în D?

R: Nu rezultă că f este continuă. Vom exemplifica cu funcţia

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2}}, & x \cdot y \neq 0 \\ 0 \quad , & x \cdot y = 0 \end{cases}$$

Vom arăta că în origine funcţia admite derivate parţiale de orice ordin, dar că nu este continuă.

Calculăm

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{x^2}{y^2} \cdot \frac{y^2}{x^2}}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{y^2}{x^2}}} = 0$$

și

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2}}}{x} = 0$$

deci $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) = 0$.

Să presupunem că s-a demonstrat că o derivată parțială $\varphi(x, y)$ are proprietatea $\varphi(0, y) = \varphi(x, 0) = 0$.

Dacă $x \cdot y \neq 0$, $\varphi(x, y) = R(x, y) \cdot f(x, y)$ unde $R(x, y)$ este o expresie rațională cu numitorul $x^p y^q$.

Atunci $\varphi_y(0, y) = \varphi_x(x, 0) = 0$ și $\varphi_x(0, y) = 0$, deoarece: $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial x} f + R \frac{\partial f}{\partial x}$ și cînd $x \to 0$, $f(x, y) \frac{\partial R}{\partial x}$ tinde la 0. La fel $\varphi_y(x, 0) = 0$. Deci $\varphi_x(x, y)$ și $\varphi_y(x, y)$ au aceeași proprietate și, prin inducție, rezultă că toate derivatele parțiale au această proprietate.

În același timp, funcția este discontinuă în origine, deoarece $\lim_{x \to 0} f(x, y) = e^{-2}$ pe direcția $y = x$.

51. Fie $z = f(u, v)$, $u = g(x, y)$, $v = h(x, y)$; $g, h \in C^1$ în $D \subset R^2$, $f \in C^{(1)}$ în $\Delta \subset R^2$; să se arate că:

$$\text{grad } z = \frac{\partial f}{\partial u} \text{grad } u + \frac{\partial f}{\partial v} \text{grad } v$$

R: Fie $z(x, y) = f(g(x, y), h(x, y))$; urmează

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial h}{\partial y}$$

de unde

$$\text{grad } z = \frac{\partial f}{\partial u}\left(\vec{i} \frac{\partial g}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial g}{\partial y}\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\vec{i} \frac{\partial h}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial h}{\partial y}\right)$$

52. Să se arate că funcția $u(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, $x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$, verifică relația $u = 2 \ln 2 - \ln (\text{grad } u)^2$

R: $\text{grad } u = \frac{2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}}{x^2 + y^2 + z^2}$

$$(\text{grad } u)^2 = \frac{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \frac{4}{(x^2 + y^2 + z^2)}$$

și, înlocuind, rezultă relația din enunț.

53. Să se calculeze derivata funcţiei $u = \frac{1}{r}, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $r \neq 0$, după direcţia gradientului ei.

R: Derivata după o direcţie l se poate scrie ca:

$$\frac{du}{dl} = \frac{l}{l} \text{grad } u$$

În acest caz

$$\bar{l} \cdot \text{grad } u = -\frac{1}{r^2} \text{grad } r = -\frac{\bar{r}}{r^3}, \quad l = \frac{r}{r^3} = \frac{1}{r^2}$$

deci

$$\frac{du}{dl} = \left(\frac{\bar{r}}{r^3}\right)^2 \cdot r^2 = \frac{1}{r^2}$$

54. Se dă funcţia

$$u(x, y, z) = \frac{\bar{r} \cdot \bar{a}}{r}, \quad r \neq 0$$

unde $\bar{a}$ este un vector constant iar $\bar{r}$ vectorul de poziţie. Să se calculeze

$$\text{div grad } u$$

R: Dacă $\bar{a} = \bar{i}a_1 + \bar{j}a_2 + \bar{k}a_3$, $\bar{r} = \bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z$, atunci

$$u(x, y, z) = \frac{xa_1 + ya_2 + za_3}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a_1}{r} - \frac{x \cdot \bar{r} \cdot \bar{a}}{r^3}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{a_2}{r} - y \cdot \frac{\bar{r} \cdot \bar{a}}{r^3}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{a_3}{r} - z\frac{\bar{r} \cdot \bar{a}}{r^3}$$

deci

$$\text{grad } u = \frac{\bar{a}}{r} - \frac{\bar{r} \cdot \bar{a}}{r^3} \bar{r}.$$

Pentru a obţine div grad u, adică

$$\text{div grad } u = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

este necesar să calculăm derivatele ce intervin în operatorul lui Laplace. Avem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{a_1 x}{r^3} - \frac{\bar{r} \cdot \bar{a}}{r^3} - \frac{xa_1}{r^3} + 3\frac{x^2}{r^5} \bar{r} \cdot \bar{a},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{a_2 y}{r^3} - \frac{\bar{r} \cdot \bar{a}}{r^3} - \frac{ya_2}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5} \bar{r} \cdot \bar{a},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{a_3 z}{r^3} - \frac{\bar{r} \cdot \bar{a}}{r^3} - \frac{za_3}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5} \bar{r} \cdot \bar{a}$$

din care obținem imediat

$$\text{div grad } u = \frac{-3\bar{r}\cdot\bar{a}}{r^3} - \frac{2\bar{r}\cdot\bar{a}}{r^3} + 3\frac{\bar{r}\cdot\bar{a}}{r^3}$$

sau

$$\text{div grad } u = \Delta u = -\frac{2\bar{r}\cdot\bar{a}}{r^3}$$

55. Se dă funcția

$$w = f(x - y,\ x + z),\ f \in C^{(2)} \text{ în } D \subset R^3$$

și se cere să se calculeze

$$E(x, y, z) = \text{div grad } w(x, y, z).$$

R: Să notăm

$$u = x - y,\ v = x + z$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v},\quad \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial u},\quad \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial v}$$

deci

$$\text{grad } w = \bar{i}\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right) - \bar{j}\frac{\partial f}{\partial u} + \bar{k}\frac{\partial f}{\partial v}$$

Avem

$$\text{div grad } w = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

însă

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial f}{\partial u}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2},\quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

deci

$$\text{div grad } w = 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)$$

56. Să se determine derivata funcției: $z(x, y) = \text{arctg}\ \frac{y}{x}$, în punctul $M_0\left(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ce aparține cercului $x^2 + y^2 - 2x = 0$ după direcția tangentei la cerc.

R: Tangenta la cerc în punctul $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ are ecuația:

$$\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}y-\left(x+\frac{1}{2}\right)=0$$

sau

$$-x+\sqrt{3}y-1=0;$$

derivata după direcția $\bar{l}\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ este

$$\frac{dz}{dl}\Big|_{M_0}=\alpha\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{M_0}+\beta\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{M_0}=+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2}=0$$

57. Să se aproximeze funcția

$$E(x, y, z)=\cos(x+y+z)-\cos x\cos y\cos z$$

considerînd că punctele (x, y, z) sînt situate într-o sferă cu centrul în origine și rază $r \leqslant 1$.

R: Aplicăm formula Mac-Laurin și ținem seama că:

$$f'_x(x, y, z)=\cos\left(x+y+z+\frac{\pi}{2}\right)+\sin x\cos y\cos z$$

$$f'_y(x, y, z)=\cos\left(x+y+z+\frac{\pi}{2}\right)+\cos x\sin y\cos z$$

$$f'_z(x, y, z)=\cos\left(x+y+z+\frac{\pi}{2}\right)+\cos x\cos y\sin z$$

$$f''_{x^2}=\cos(x+y+z+\pi)+\cos y\cos z\cos x;$$

$$f''_{y^2}=\cos(x+y+z+\pi)+\cos x\cos y\cos z;$$

$$f''_{z^2}=\cos(x+y+z+\pi)+\cos x\cos y\cos z;$$

$$f''_{xy}=\cos(x+y+z+\pi)-\sin x\sin y\cos z;$$

$$f''_{xz}=\cos(x+y+z+\pi)-\sin x\cos y\sin z;$$

$$f''_{yz}=\cos(x+y+z+\pi)-\cos x\sin y\sin z$$

Obținem, neglijînd puterile superioare lui 2 ale lui x, y, z:

$$\cos(x+y+z)-\cos x\cos y\cos z=-(xy+yz+zx)+\ldots$$

58. Să se determine o mulțime deschisă $D \subset R^2$ și o funcție continuă f definită în D astfel ca $\frac{\partial f}{\partial x} \equiv 0$ în D, dar f să depindă și de x.

R: Fie $D=\{(x, y) \mid -2<x<2;\ 0<y<2\}-$

$$-\{(x, y) \mid -1 \leqslant x \leqslant 1,\ 1 \leqslant y<2\}$$

și

$$f(x, y)=\begin{cases}-y+2, & -2<x<-1,\ 1 \leqslant y<2\\ y, & \text{pentru celelalte puncte din } D\end{cases}$$

Aici f nu este o funcție numai de y, deoarece

$$f\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \quad \text{și} \quad f\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

și deci depinde și de x.

Acest lucru se explică prin forma domeniului D din figura 10.

Pentru $1 \leqslant y < 2$ se observă că o paralelă la axa Ox nu conține numai puncte din domeniul de definiție al funcției.

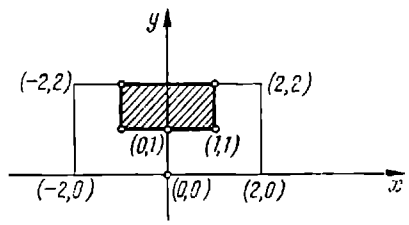

Fig. 10

59. Să se determine o funcție reală f pe R^3 cu valori în R astfel ca $|f(x)| \leqslant \|x\|$, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ și $\|\text{grad } f(0)\| = \sqrt{3}$

R: Funcția

$$f(x) = \begin{cases} \|x\| \text{ dacă } \sum_{i=1}^{3} x_i \geqslant 0 \\ -\|x\| \text{ dacă } \sum_{i=1}^{3} x_i < 0 \end{cases}$$

îndeplinește condițiile cerute:

$$|f(x)| = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

$$\text{grad } f(0) = \vec{i}\,\frac{\partial f}{\partial x_1}(0) + \vec{j}\,\frac{\partial f}{\partial x_2}(0) + \vec{k}\,\frac{\partial f}{\partial x_3}(0)$$

Dar:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 0, 0) = \lim_{x_1 \to 0} \frac{f(x_1, 0, 0) - f(0, 0, 0)}{x_1} = \lim_{x_1 \to 0} \pm \frac{\sqrt{x_1^2}}{x_1} = \pm 1$$

și la fel pentru celelalte, deci

$$\text{grad } f(0) = \pm(\vec{i} + \varepsilon_1 \vec{j} + \varepsilon_2 \vec{k}), \text{ unde } \varepsilon_1, \varepsilon_2 = \mp 1$$

de unde

$$\|\text{grad } f(0)\| = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$$

60. Să se calculeze $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ și $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ dacă

$$u(x, y) = f(x^2 + y^2, x^2 - y^2, xy)$$

și f are derivate parțiale de ordinul II în raport cu argumentele sale într-un domeniu $D \subset R^2$.

R: Fie $\alpha = x^2 + y^2$, $\beta = x^2 - y^2$, $\gamma = xy$

atunci:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \alpha} 2x + \frac{\partial f}{\partial \beta} 2x + y \frac{\partial f}{\partial \gamma};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \alpha} 2y - \frac{\partial f}{\partial \beta} 2y + x \frac{\partial f}{\partial \gamma};$$

în continuare, avem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \beta}\right) + 2x\left(2x\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} + 2x\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} + y\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta}\right) +$$

$$+ 2x\left(2x\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} + 2x\frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial \beta \partial \gamma}\right) + y\left(2x\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \gamma} + 2x\frac{\partial^2 f}{\partial \beta \partial \gamma} + y\frac{\partial^2 f}{\partial \gamma^2}\right)$$

În mod analog obținem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} - \frac{\partial f}{\partial \beta}\right) + 2y\left(2y\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} - 2y\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} + x\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \gamma}\right) -$$

$$- 2y\left(2y\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} - 2y\frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} + x\frac{\partial^2 f}{\partial \gamma \partial \beta}\right) + x\left(2y\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \gamma} - 2y\frac{\partial^2 f}{\partial \beta \partial \gamma} + x\frac{\partial^2 f}{\partial \gamma^2}\right)$$

61. Să se calculeze div (grad f(r)). În ce caz este div (grad f(r)) nulă?

R: grad $f(r) = \frac{df}{dr}$ grad $r = \frac{df}{dr}\frac{\bar{r}}{r}$;

$$\text{div (grad } f(r)) = \text{div}\left(\frac{df}{dr}\frac{\bar{r}}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\frac{df}{dr}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r}\frac{df}{dr}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r}\frac{df}{dr}\right) =$$

$$= \frac{3}{r}\frac{df}{dr} - \frac{df}{dr}\cdot\frac{(x^2+y^2+z^2)}{r^3} + \frac{r}{r}\frac{d^2f}{dr^2} = \frac{d^2f}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{df}{dr}\cdot$$

$\frac{d^2f}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{df}{dr} = 0$, se mai scrie, dacă notăm $\frac{df}{dr} = u(r)$

$$u'(r) + \frac{2}{r}u(r) = 0$$

sau

$$\frac{du}{u} = -\frac{2}{r}dr \to u = \frac{C}{r^2};$$

de unde

$$\frac{df}{dr} = \frac{C}{r^2} \text{ sau } f(r) = -\frac{C}{r} + C_1$$

62. Să se calculeze diferențiala de ordinul I a funcției

$$u(x, y, z) = f(x^y, y^z, z^x), \quad x, y, z > 0$$

unde f este o funcție diferențiabilă de argumentele ei.

R: Fie $\alpha = x^y$, $\beta = y^z$, $\gamma = z^x$

$$du = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \alpha}yx^{y-1} + \frac{\partial f}{\partial \gamma}z^x \ln z$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \beta}zy^{z-1} + x^y\frac{\partial f}{\partial \alpha}\ln x$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = xz^{x-1}\frac{\partial f}{\partial \gamma} + y^z\frac{\partial f}{\partial \beta}\ln y$$

deci:

$$du = \frac{\partial f}{\partial \alpha}(yx^{y-1}\,dx + x^y \ln x\,dy) +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial \beta}(zy^{z-1}\,dy + y^z \ln y\,dz) +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial \gamma}(z^x \ln z\,dx + xz^{x-1}\,dz).$$

63. Fie f o aplicație a intervalului $I = [-1, 1] \subset R$ în R^2 definită astfel: $f(t) = (x(t), y(t))$.

$$f(t) = \begin{cases} (0,0) & , t \in [-1, 0] \\ \left(t^2 \sin \frac{1}{t}, t^2 \cos \frac{1}{t}\right), & t \in (0, 1]. \end{cases}$$

Să se arate că f este derivabilă în fiecare punct din intervalul $(-1, 1)$ și că imaginea acestui interval prin aplicația f' nu este un segment.

R: Să calculăm

$$x'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{x(t) - x(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t^2 \sin \frac{1}{t}}{t} = 0$$

$$y'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{y(t) - y(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t^2 \cos \frac{1}{t}}{t} = 0,$$

urmează

$$f'(t) = \begin{cases} (0, 0), & t \in [-1, 0] \\ \left(2t \sin \frac{1}{t} - \cos \frac{1}{t}, 2t \cos \frac{1}{t} + \sin \frac{1}{t}\right), & t \in (0, 1] \end{cases}$$

Observăm că $\lim_{t \to 0} f'(t)$ nu există, deci mulțimea valorilor lui $f'(t)$ nu poate fi un segment.

64. Să se arate că funcția $f : R^n \to R$ care îndeplinește condiția $|f(x_1, ..., x_n)| \leqslant \|x\|^2$ admite derivate parțiale de ordinul I în origine.

R: Din condiție avem:

$$-(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2) \leqslant f(x_1, x_2, ..., x_n) \leqslant x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_k}\right|_0 = \lim_{x_k \to 0} \frac{f(0, ..., 0, x_k, 0, ..., 0) - f(0, 0, ..., 0)}{x_k}$$

Dar, $0 \leqslant f(0, 0, ..., 0) \leqslant 0$, deci $f(0, 0, ..., 0) = 0$

$$-x_k \leqslant \frac{f(0, ..., 0, x_k, 0, ..., 0) - f(0, ..., 0)}{x_k} \leqslant x_k$$

și, trecînd la limită, obținem că $\left.\frac{\partial f}{\partial x_k}\right|_0 = 0$.

65. Să se demonstreze că o funcție $f(x_1, x_2) : E \subset R^2$, care are derivatele parțiale

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \text{ și } \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}$$

mărginite într-un anumit domeniu convex E, este uniform continuă în acest domeniu.

R: Fie $x' = (x_1', x_2')$ și $x'' = (x_1'', x_2'')$ puncte arbitrare din E. Să considerăm diferența

$$f(x_1', x_2') - f(x_1'', x_2'') = f(x_1', x_2') - f(x_1'', x_2') + f(x_1'', x_2') - f(x_1'', x_2'') =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi, x_2')(x_1'' - x_1') + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1'', \eta)(x_2'' - x_2')$$

cu $\xi \in (x_1', x_1'')$, $\eta \in (x_2', x_2'')$.

Luînd modulul și ținînd seama de ipoteză, rezultă

$$|f(x_1', x_2') - f(x_1'', x_2'')| \leqslant M(|x_1'' - x_1'| + |x_2'' - x_2'|) \leqslant$$

$$\leqslant 2M\sqrt{(x_1'' - x_1')^2 + (x_2'' - x_2')^2} = 2M\rho(x', x'') < \varepsilon$$

de unde rezultă că pentru orice două puncte pentru care $\rho(x', x'') < \frac{\varepsilon}{2M}$ $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ ceea ce demonstrează continuitatea uniformă a funcției.

66. Să se calculeze $\frac{m+n_u}{\partial x^m \partial y^n}$ dacă $u = \frac{x+y}{x-y}$, $x \neq y$.

R: Pentru calculul derivatei $\frac{\partial^m u}{\partial x^m}$ folosim regula lui Leibniz aplicată funcțiilor:

$v(x) = x + y$ și $w(x) = \frac{1}{x-y}$; obținem:

$$\frac{\partial^m u}{\partial x^m}(x+y)(-1)^m \frac{m!}{(x-y)^{m+1}} + C_m^1(-1)^{m-1}\frac{(m-1)!}{(x-y)^m} =$$

$$= \frac{(-1)^m m!\, 2y}{(x-y)^{m+1}}, x \neq y, \quad m \in N.$$

Derivăm această funcție în raport cu y de n ori folosind de asemenea regula lui Leibniz:

$$\frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n} = (-1)^m m!\, 2\left[\frac{(m+1)\ldots(m+n)}{(x-y)^{m+n+1}} y + \frac{C_n^1(m+1)\ldots(m+n-1)}{(x-y)^{m+n}}\right] =$$

$$= \frac{(-1)^m (m+n-1)!(my+nx)}{(x-y)^{m+n+1}}.$$

67. Să se calculeze diferențiala de ordinul „n" a funcției: $u(x, y, z) = \ln(x^x y^y z^z)$, $x, y, z > 0$.

R: Diferențiala de ordinul „n" are expresia:

$$(1)\ d^n u(x, y, z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy + \frac{\partial}{\partial z}\,dz\right)^{(n)} u(x, y, z) =$$

$$= \sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} \frac{n}{\alpha!\beta!\gamma!}\,\frac{\partial^n u}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}\,dx^\alpha dy^\beta dz^\gamma$$

dar $u(x, y, z) = x \ln x + y \ln y + z \ln z$
avem însă

$$(x \ln x)^{(n)} = x(\ln x)^{(n)} + n(\ln x)^{(n-1)}$$

și

$$(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n},$$

$$(x \ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^{n-1}} + n\,\frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{x^{n-1}} =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}(n-2)!}{x^{n-1}}(n-1-n) = \frac{(-1)^n(n-2)!}{x^{n-1}}$$

și din suma (1) rămîne numai:

$$d^n u = \frac{(-1)^n(n-2)!}{x^{n-1}}\,dx^n + \frac{(-1)^n(n-2)!}{y^{n-1}}\,dy^n + \frac{(-1)^n(n-2)!}{z^{n-1}}\,dz^n$$

68. Fie f o aplicație infinit derivabilă a spațiului R^n în spațiul Banach E. Să se arate că

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(0, ..., 0) + x_1 f_1(x_1, ..., x_n) +$$
$$+ x_2 f_2(x_2, ..., x_n) + ... + x_n f_n(x_n)$$

unde f_k sînt infinit derivabile în R^{n-k+1} $(1 \leqslant k \leqslant n)$.

R: Scriem funcția astfel:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = (f(x_1, x_2, ..., x_n) - f(0, x_2, ..., x_n)) + f(0, x_2, ..., x_n)$$

dar:

$$f(x_1, ..., x_n) - f(0, x_2, ..., x_n) = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2, ..., x_n),$$

$$\xi_1 = \theta_1 x_1,\ \theta_1 \in (0, 1)$$

Vom nota

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\theta x_1, x_2, ..., x_n) = f_1(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Această funcție este infinit derivabilă, deoarece $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ este infinit derivabilă în R^n. Obținem astfel:

$$f(x_1, ..., x_n) = x_1 f_1(x_1, ..., x_n) + (f(0, x_2, ..., x_n) - f(0, 0, x_3, ..., x_n) +$$
$$+ f(0, 0, x_3, ..., x_n)$$

în mod analog

$$f(0, x_2, ..., x_n) - f(0, 0, x_3, ..., x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\xi_2, x_3, ..., x_n)$$
$$\xi_2 = \theta_2 x_2, \quad \theta_2 \in (0, 1)$$

raţionînd în acelaşi fel, obţinem prin inducţie rezultatul cerut.

69. Să se determine extremele funcţiei

$$f(x, y) = \cos x + \cos y + \cos(x + y), \quad (x, y) \in [0, \pi] \times [0, \pi]$$

R: Calculăm derivatele parţiale f'_x, f'_y şi determinăm punctele staţionare. Avem

$$f'_x(x, y) = -\sin x - \sin(x + y),$$
$$f'_y(x, y) = -\sin y - \sin(x + y).$$

Punctele staţionare sînt date de sistemul $f'_x(x, y) = 0$, $f'_y(x, y) = 0$,

deci: $\sin x + \sin(x + y) = 0$, $\sin y + \sin(x + y) = 0$

sau $\sin x = \sin y$ cu soluţiile $x = y$, $x = \pi - y$.

Pentru $x = y$, obţinem $\sin x + \sin 2x = 0$, $\sin x(1 + 2\cos x) = 0$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \pi, \quad x_3 = \frac{2\pi}{3}, \quad y_1 = 0, \quad y_2 = \pi, \quad y_3 = \frac{2\pi}{3};$$

pentru $x + y = \pi$, obţinem $\sin x = 0$; $x'_1 = 0$, $y'_1 = \pi$, $x'_2 = \pi$, $y'_2 = 0$; prin urmare avem cinci puncte staţionare.

$$f''_{xx}(x, y) = -\cos x - \cos(x + y),$$
$$f''_{xy}(x, y) = -\cos(x + y), \quad f''_{yy}(x, y) = -\cos y - \cos(x + y).$$

Avem deci următoarele rezultate:

în punctele A_1 de coordonate $x_1 = 0$, $y_1 = 0$

$r_1 t_1 - s_1^2 = (-2) \cdot (-2) - 1 = 3 > 0$, $r_1 < 0$, maxim cu $f(x_1 y_1) = 3$;

în punctul A_2 de coordonate $x_2 = \pi$, $y_2 = \pi$

$r_2 t_2 - s_2^2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3 > 0$, $r_2 > 0$, minim cu $f(x_2, y_2) = -1$;

în punctele A_3 de coordonate $x_3 = \frac{2\pi}{3}$, $y_3 = \frac{2\pi}{3}$,

$$r_3 t_3 - s_3^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 > 0, \quad r_3 > 0$$

minim, cu $f(x_3, y_3) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$;

în punctul A_4 de coordonate $x'_1 = 0$, $y'_1 = \pi$,
$r_4 t_4 - s_4^2 = -1 < 0$, nu avem extreme;
în punctul A_5 de coordonate $x'_2 = \pi$, $y'_2 = 0$,
$r_5 t_5 - s_5^2 = -1 < 0$, nu avem extreme.

Să cercetăm cum se comportă funcţia în vecinătatea punctului A_4. În planul $x = 0$, avem

$$f(0, y) = 1 + 2\cos y, \qquad f'(0, y) = -2\sin y,$$

$$f''(0, y) = -2\cos y, \qquad f'(0,\pi) = 0, \qquad f''(0, \pi) > 0, \quad \text{minim};$$

În planul $y = \pi$, avem

$$f(x, \pi) = -1 + 2\cos x, \qquad f'(x, \pi) = -2\sin x,$$

$$f''(x, \pi) = -2\cos x, \qquad f'(0, \pi) = 0, \qquad f''(0, \pi) < 0, \quad \text{maxim},$$

deci este un punct şa.

70. Să se calculeze extremele funcţiei:

$$u(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{4} & x, y, z > 0 \\ 0, & (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

R: Observăm că punctul (0, 0, 0) este un punct de minim, dar că funcţia nu este derivabilă în origine.

Să vedem pentru $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y} = 0, \quad y = x^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{z} = 0, \quad y^2 = xz$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{y}{z^2} + \frac{1}{16} = 0, \quad 16\,y = z^2$$

de unde rezultă că $1, x, y, z, 4$ formează o progresie geometrică cu raţia $q = \sqrt[4]{16} = 2$ şi punctul staţionar este $x = 2$, $y = 4$, $z = 8$. Calculăm diferenţiala de ordinul II a funcţiei în punctul staţionar:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2}{x^3}\Big|_{M_0} = \frac{1}{4}; \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3}\Big|_{M_0} = \frac{1}{4^2}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{2y}{z^3}\Big|_{M_0} = \frac{1}{8^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{y^2}\Big|_{M_0} = -\frac{1}{4^2}; \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = -\frac{1}{z^2}\Big|_{M_0} = -\frac{1}{8^2};$$

deci

$$d^2u\Big|_{M_0} = \frac{1}{4}dx^2 + \frac{1}{4^2}dy^2 + \frac{1}{8^2}dz^2 - \frac{2}{4^2}dx\,dy - \frac{2}{8^2}dy\,dz =$$

$$= \frac{1}{8^2}(dy - dz)^2 + \frac{1}{4^2}\left(2dx - \frac{1}{2}dy\right)^2 + \frac{1}{32}dy^2 > 0$$

deci punctul de coordonate $x = 2$, $y = 4$, $z = 8$, este un punct de minim pentru $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

Valoarea funcției în acest punct este:

$$u_{min} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 2 = \frac{7}{2}$$

71. Inducția unei bobine are expresia:

$$u = \frac{mxyz}{ax + by + cz}, \quad ax + by + cz \neq 0,$$

unde x este raza medie de înfășurare, y diferența dintre raza exterioară și raza interioară, z lungimea bobinei, iar m, a, b, c constante.

Să se determine valorile extreme ale funcției $u(x, y, z)$, volumul bobinei fiind dat.

R: Volumul bobinei este $2\pi xyz = V$. Trebuie să găsim extremele funcției

$$u = \frac{mxyz}{ax + by + cz},$$

unde

$$z = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{V}{xy} \text{ cu } ax + by + cz \neq 0, \ a, b, c \neq 0.$$

Avem

$$u = \frac{mxy}{ax + by + \frac{C}{2\pi}\frac{V}{xy}} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{V}{xy}$$

Mai comod este să caulculăm extremele lui $\frac{1}{u}$. Avem

$$\frac{1}{u} = U(x, y, z) = \frac{2\pi}{nV}\left(ax + by + \frac{cV}{2\pi} \cdot \frac{1}{xy}\right)$$

Determinăm punctele staționare

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{2\pi}{mV}\left(a - \frac{cV}{2\pi}\frac{1}{x^2y}\right),$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{2\pi}{mV}\left(a - \frac{cV}{2\pi}\frac{1}{xy^2}\right)$$

sistem care admite soluția M_0

$$x_0 = \sqrt[3]{\frac{bcV}{2\pi a^2}}, \ y_0 = \sqrt[3]{\frac{acV}{2\pi b^2}} \quad \text{și} \quad z_0 = \sqrt[3]{\frac{abV}{2\pi c^2}}$$

Calculăm derivatele de ordinul doi

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{2c}{m} \cdot \frac{1}{x^3 y}; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{2c}{m} \cdot \frac{2}{xy^3}; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{c}{m} \cdot \frac{1}{x^2 y^2}$$

$$r_0 t_0 - s_0^2 = \frac{c^2}{m^2}\left(4\frac{1}{x^4 y^4} - \frac{1}{x^4 y^4}\right)_{M_0} = \frac{3c^2}{m^2} \cdot \left(\frac{(2\pi)^2 ab}{c^2 V^2}\right)^{4/3} > 0$$

și, pentru că $r_0 > 0$, urmează că în M_0, U este minimă, deci $u = \frac{1}{U}$ are un maxim dat de

$$u_{max} = \frac{m}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{4\pi^2}\frac{V^2}{abc}}$$

72. Se dau dreptele

$$D_1: \frac{x - a_1}{\alpha_1} = \frac{y - b_1}{\beta_1} = \frac{z - c_1}{\gamma_1} = u$$

$$D_2: \frac{x - a_2}{\alpha_2} = \frac{y - b_2}{\beta_2} = \frac{z - c_2}{\gamma_2} = v$$

să se afle distanța minimă dintre două puncte ale lor.

R: Dacă M_1 și M_2 sînt două puncte pe D_1, D_2 respectiv de coordonate

$$M_1: \quad (\alpha_1 u + a_1, \quad \beta_1 u + b_1, \quad \gamma_1 u + c_1)$$

$$M_2: \quad (\alpha_2 v + a_2, \quad \beta_2 v + b_2, \quad \gamma_2 v + c_2)$$

distanța dintre ele este dată de

$$|\overline{M_1 M_2}| = [(\alpha_1 u + a_1 - \alpha_2 v - a_2)^2 + (\beta_1 u + b_1 - \beta_2 v - b_2)^2 + (\gamma_1 u + c_1 - \gamma_2 v - c_2)^2]^{1/2}$$

și este minimă cînd

$$\frac{\partial |\overline{M_1 M_2}|}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial |\overline{M_1 M_2}|}{\partial v} = 0$$

sau

$$\alpha_1(\alpha_1 u + a_1 - \alpha_2 v - a_2) + \beta_1(\beta_1 u + b_1 - \beta_2 v - b_2) + \gamma_1(\gamma_1 u + c_1 - \gamma_2 v - c_2) = 0$$

$$\alpha_2(\alpha_1 u + a_1 - \alpha_2 v - a_2) + \beta_2(\beta_1 u + b_1 - \beta_2 v - b_2) + \gamma_2(\gamma_1 u + c_1 - \gamma_2 v - c_2) = 0$$

care se mai scrie

$$u(\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2) - v(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2) + \alpha_1(a_1 - a_2) + \beta_1(b_1 - b_2) + \gamma_1(c_1 - c_2) = 0$$

$$u(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2) - v(\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2) + \alpha_2(a_1 - a_2) + \beta_2(b_1 - b_2) + \gamma_2(c_1 - c_2) = 0$$

de unde obținem

$$\lambda^2 u = (\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2)(\alpha_1(a_1 - a_2) + \beta_1(b_1 - b_2) + \gamma_1(c_1 - c_2)) -$$
$$- (\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2)(\alpha_2(a_1 - a_2) + \beta_2(b_1 - b_2) + \gamma_2(c_1 - c_2))$$

unde

$$\lambda^2 = (\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2)(\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2) - (\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2)^2 =$$
$$= (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2 + (\gamma_1\alpha_2 - \alpha_1\gamma_2)^2 + (\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)^2$$

Distanța minimă este dată de

$$|\overline{M_1M_2}| \min = \frac{1}{\lambda}[(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)(a_1 - a_2) + (\gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1)(b_1 -$$
$$- b_2) + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)(c_1 - c_2)]$$

și se recunoaște în rezultat expresia distanței dintre două drepte din spațiu.

73. *Problema lui Huygens.* Să se intercaleze între două numere pozitive a și b, n numere $x_1, x_2, \ldots, x_n$ astfel ca funcția

$$u = \frac{x_1x_2 \ldots x_n}{(a + x_1)(x_1 + x_2) \ldots (x_n + b)}$$

să fie maximă.

R: Calculăm extremele funcției $u(x_1, \ldots, x_n)$, $x_1 \neq -a$, $x_2 \neq -x_1, \ldots, x_n \neq -b$.

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{x_2 \ldots x_n}{(a + x_1)(x_1 + x_2) \ldots (x_n + b)} - \frac{x_1x_2 \ldots x_n}{(a + x_1)^2(x_1 + x_2) \ldots (x_n + b)} -$$
$$- \frac{x_1x_2 \ldots x_n}{(a + x_1)(x_1 + x_2)^2 \ldots (x_n + b)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{x_1x_2 \ldots x_n}{(a + x_1)(x_1 + x_2) \ldots (x_n + b)}\left(1 - \frac{x_1}{a + x_1} - \frac{x_1}{x_1 + x_2}\right) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{x_1x_3 \ldots x_n}{(a + x_1) \ldots (x_n + b)}\left(1 - \frac{x_2}{x_1 + x_2} - \frac{x_2}{x_2 + x_3}\right) = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \frac{x_1x_2 \ldots x_{k-1}x_{k+1} \ldots x_n}{(a + x_1) \ldots (x_n + b)}\left(1 - \frac{x_k}{x_{k-1} + x_k} - \frac{x_k}{x_k + x_{k+1}}\right) = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_n} = \frac{x_1x_2 \ldots x_{n-1}}{(a + x_1) \ldots (x_n + b)}\left(1 - \frac{x_n}{x_{n-1} + x_n} - \frac{x_n}{x_n + b}\right) = 0$$

de unde, pe lîngă soluțiile banale $x_1 = 0, \ldots x_n = 0$, obținem și $x_1^2 = ax_2$, $x_2^2 = x_1x_3, \ldots, x_n^2 = x_{n-1}b$, deci $a, x_1, x_2, \ldots x_n, b$ formează o progresie geometrică cu rația $q = \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$.

74. Fie f o funcție de două ori diferențiabilă definită în $I = [-a, a] \subset R$ cu valori într-un spațiu metric E; fie $M_0 = \sup_{t \in I} \| f(t) \|$ și $M_2 = \sup_{t \in I} \| f''(t) \|$. Să se arate că pentru orice $t \in I$,

$$\| f'(t) \| \leqslant \frac{M_0}{a} + \frac{t^2 + a^2}{2a} M_2$$

R: Folosim formula lui Taylor:

$$f(a) = f(t) + \frac{a - t}{1!} f'(t) + \frac{(a - t^2)}{2} f''(\xi), \quad t < \xi < a$$

$$f(-a) = f(t) + \frac{-a - t}{1!} f'(t) + \frac{(a + t)^2}{2!} f''(\eta), \quad -a < \eta < t$$

scădem aceste relații și obținem

$$f(a) = f(-a) = 2a f'(t) + \frac{(a - t)^2 f''(\xi) - (a + t)^2 f''(\eta)}{2!}$$

de unde

$$f'(t) = \frac{f(a) - f(-a)}{2a} + \frac{(a + t)^2 f''(\eta) - (a - t)^2 f''(\xi)}{4a}$$

aplicăm neegalitățile normei:

$$\| f'(t) \| \leqslant \frac{M_0}{a} + \frac{[(a + t)^2 + (a - t)^2] M_2}{4a}$$

obținem

$$\| f'(t) \| \leqslant \frac{M_0}{a} + \frac{a^2 + t^2}{2a} M_2$$

CAPITOLUL V

ŞIRURI ŞI SERII DE FUNCŢII

1. Se dă şirul de funcţii

$$f_n(x) = 1 + x^{2n}, \quad x \in R, \quad n = 1, 2, \ldots$$

şi se cere

a) mulţimea de convergenţă şi funcţia limită;

b) să se arate că nu este uniform convergent pe $(-1, +1)$;

Să se determine o mulţime de convergenţă uniformă.

R. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = +\infty$ pentru $x > 1$ şi

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1, \quad |x| < 1 \text{ iar } \lim_{n\to\infty} f_n(1) = 2, \quad \lim_{n\to\infty} f_n(-1) = 2$$

urmează că mulţimea de convergenţă este $[-1, +1]$, iar funcţia limită $f(x)$ este dată de

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-1, +1) \\ 2, & x = 1, \quad x = -1 \end{cases}$$

Să arătăm că şirul f_n nu este uniform convergent pe $(-1, +1)$. În acest scop arătăm că nu există $N(\varepsilon)$ finit astfel încît

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

pentru orice $n > N(\varepsilon)$ şi orice $x \in (-1, +1)$. Avem $f_n(x) - f(x) = x^{2n}$, deci

$$x^{2n} < \varepsilon \text{ sau } 2n \ln|x| < \ln \varepsilon$$

de unde

$$2n > \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln \frac{1}{|x|}}, \quad x \in (-1, +1)$$

însă pentru ε fixat avem

$$\sup_{|x|<1} \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln \frac{1}{|x|}} = +\infty,$$

deci nu există $N(\varepsilon)$. Pentru orice interval închis $[-\alpha, \alpha] \subset (-1, +1)$ și $x \in [-\alpha, \alpha]$ avem

$$\sup_{|\alpha| \leqslant \alpha} \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln \frac{1}{|x|}} = \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln \frac{1}{\alpha}} = N(\varepsilon)$$

deci șirul $f_n(x) = x^{2n} + 1$ este uniform convergent.

2. Se dă șirul de funcții

$$f_n(x) = x^{2n}(x^n + 1) + 1, \quad x \in R$$

și se cere

a) să se determine mulțimea de convergență și funcția limită;

b) să se arate că pe mulțimea [0,1] nu este uniform convergent; să se găsească o mulțime de convergență uniformă cuprinsă în [0,1).

R: Șirul este divergent pentru $x > 1$, deoarece

$$\lim_{n \to \infty} x^{2n}(x^n + 1) = +\infty$$

iar pentru $x < -1$, limita nu există.

Pentru $|x| < 1$, deoarece

$$\lim_{n \to \infty} x^n = 0, \quad \lim_{n \to \infty} x^{2n} = 0$$

șirul este convergent și

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = 1, \quad |x| < 1.$$

Pentru $x = 1$, $\lim_{n \to \infty} f_n(1) = 3$ iar pentru $x = -1$, avem $f_{2m}(-1) = 3$, $f_{2m+1} = 1$, deci șirul nu este convergent. Mulțimea de convergență este deci $(-1, +1]$ cu funcția limită

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-1, +1) \\ 3, & x = 1. \end{cases}$$

Trebuie să găsim $N(\varepsilon)$ astfel încît pentru $n > N(\varepsilon)$ să avem

$$|x^{2n}(x^n + 1)| < \varepsilon$$

pentru orice $x \in [0, 1)$. Să observăm că dacă șirul

$$g_n(x) = x^{2n} + 1, \quad x \in [0, 1), \quad n = 1, 2, \ldots$$

nu este uniform convergent pe [0,1) nici şirul

$$f_n(x) = x^{2n}(x^n + 1) + 1$$

nu este convergent deoarece pentru orice $x \in [0,1)$, $f_n(x) \geqslant g_n(x)$, iar cele două şiruri au aceiaşi funcţie limită.

Pentru şirul $g_n(x)$ procedăm în modul următor. Din $x^{2n} < \varepsilon$ obţinem

$$2n \ln \frac{1}{|x|} > \ln \frac{1}{\varepsilon}$$

deci

$$n > \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{2 \ln \frac{1}{|x|}}$$

însă $\sup\limits_{|x|<1} \dfrac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{2 \ln \frac{1}{|x|}} = +\infty$ şi şirul $g_n(x)$ nu este uniform convergent pe [0,1).

Pe orice interval închis $[0, \alpha] \subset [0,1)$ şirul $g_n(x)$ este uniform convergent cu

$$N(\varepsilon) = \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{2 \ln \frac{1}{\alpha}}$$

deci şi şirul $f_n(x)$ este uniform convergent.

3. Se dă şirul de funcţii

$$f_n(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n, \quad x \in R$$

şi se cere să se arate că este convergent pe $(-1, +1)$ însă nu este uniform convergent. Să se găsească o mulţime de convergenţă uniformă.

R: Avem

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} = \frac{1}{1 - x} + \frac{x^{n+1}}{x - 1}$$

Pentru $|x| > 1$ şirul este divergent deoarece $\lim\limits_{n \to \infty} \left| \dfrac{x^{n+1}}{x - 1} \right| = +\infty$.

Pentru $x = 1$, avem $f_n(1) = n$ iar pentru $x = -1$, $f_n(-1) = 1 - (-1)^n$, deci şirul este de asemenea divergent.

Pentru $x \in (-1, +\infty)$ şirul este convergent cu funcţia limită $f(x) = \dfrac{1}{1 - x}$. Să arătăm că nu este uniform convergent pe $(-1, +1)$.

Avem

$$f_n(x) - f(x) = \frac{x^{n+1}}{x - 1}$$

și pentru orice $\varepsilon > 0$ trebuie să găsim $N(\varepsilon)$ astfel încît

$$\left| \frac{x^{n+1}}{x-1} \right| < \varepsilon$$

pentru orice $n > N(\varepsilon)$ și $x \in (-1, +1)$. Putem scrie

$$(n+1) \ln |x| - \ln |x-1| < \ln \varepsilon$$

sau

$$(n+1) \ln \frac{1}{|x|} + \ln |x-1| > \ln \frac{1}{\varepsilon}$$

sau

$$n+1 > \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon} - \ln |x-1|}{\ln \frac{1}{|x|}}$$

însă

$$\sup_{|x|<1} \left(\frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln \frac{1}{|x|}} - \frac{\ln |x-1|}{\ln \frac{1}{|x|}} \right) = \sup_{|x|<1} \left(\frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln \frac{1}{|x|}} + \frac{\ln \frac{1}{|x-1|}}{\ln \frac{1}{|x|}} \right) = +\infty$$

O mulțime de convergență uniformă este orice interval $[-a, a] \subset$ $\subset (-1, +1)$ deoarece putem lua

$$N(\varepsilon) = \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln \frac{1}{a}}, \quad a > 0.$$

4. Să se arate că șirul de funcții

$$u_n(x) = \sin^n x + \cos^n x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad n = 1, 2, \ldots$$

este convergent pe mulțimea de definiție. Să se determine funcția limită. Șirul nu este uniform convergent pe $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

R: Pentru $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $0 < \sin x < 1$, $0 < \cos x < 1$

deci

$$\lim_{n \to \infty} u_n(x) = 0, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right);$$

deoarece $u_n(0) = 1$, $u_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, urmează că funcţia limită $u(x)$ este dată de

$$u(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ 1, & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Pentru a arăta că şirul nu este uniform convergent pe $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ este suficient a arăta că fiecare din şirurile

$$u_n'(x) = \sin^n x, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$u_n''(x) = \cos^n x, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad n = 1, 2, \ldots$$

nu sînt uniform convergente pe $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Funcţia limită pentru ambele şiruri este $u'(x) = u''(x) = 0$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Avem, deoarece $u_n'(x) > 0$ pe $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\sin^n x < \varepsilon, \quad n \ln \sin x < \ln \varepsilon,$$

sau

$$n > \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln \frac{1}{\sin x}}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

însă, considerînd pe $\varepsilon > 0$, fix avem

$$\sup_{x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)} \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln \frac{1}{\sin x}} = +\infty$$

În mod asemănător

$$\cos^n x < \varepsilon, \quad n \ln \cos x < \ln \varepsilon$$

sau

$$n > \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln \frac{1}{\cos x}}.$$

și pentru că

$$\sup_{x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)} \frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln\frac{1}{\cos x}} = +\infty$$

urmează că șirurile $(u_n'(x))_{n\in N}$, $(u_n''(x))_{n\in N}$, $x\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ nu sînt uniform convergente pe $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Din

$$|\sin^n x + \cos^n x| = \sin^n x + \cos^n x, \quad x\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

rezultă că și șirul din enunț nu este uniform convergent pe $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

5. Se consideră șirul de funcții $u_1(x), ..., u_n(x), ...$ definite pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ de relația de recurență

$$u_1(x) = x, \; u_n(x) = \sin[u_{n-1}(x)]$$

Să se arate că șirul de funcții $(u_n(x))_{n\in N}$ converge uniform la zero pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

R: Șirul de funcții $u_n(x)$ este un șir monoton descrescător în $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, deoarece

$$u_n(x) = \sin[u_{n-1}(x)] < u_{n-1}(x).$$

Șirul este de asemenea mărginit

$$0 < u_n(x) < x$$

pentru orice x din $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Rezultă că șirul este simplu convergent.

Trecînd la limită în relația de recurență rezultă că limita acestui șir este soluția ecuației

$$u(x) = \sin[u(x)]$$

Această ecuație este verificată numai de funcția

$$u(x) \equiv 0, \quad x\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Pentru a arăta că şirul este uniform convergent către funcţia $u(x)$, trebuie arătat că şirul numeric α_n definit de

$$|u_n(x) - u(x)| \leqslant \sup_{0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}} |u_n(x) - u(x)| = \alpha_n,$$

este convergent către zero.

Să observăm că funcţia $u_n(x)$ este o funcţie crescătoare, ceea ce se verifică printr-un raţionament de inducţie.

$u_0(x) = x$ este crescătoare; presupunem că $u_{n-1}(x)$ este crescătoare şi arătăm că $u_n(x)$ este crescătoare.

Fie $x' < x''$, $u_n(x') = \sin[u_{n-1}(x')] \leqslant \sin[u_{n-1}(x'')] = u_n(x'')$

Din această proprietate a funcţiei $u_n(x)$ rezultă că $\sup_{x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]} u_n(x) = u_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Obţinem astfel că

$$|u_n(x) - u(x)| \leqslant \left| u_n\left(\frac{\pi}{2}\right) \right|$$

care este un şir monoton, mărginit ce tinde la zero; am arătat mai sus că această afirmaţie este valabilă pentru orice x deci în particular şi pentru $x = \frac{\pi}{2}$.

6. Să se arate că şirul de funcţii $(f_n(x))_{n \in N}$ definit de

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{kx - E(kx)}{2^k}$$

este uniform convergent pe mulţimea R a numerelor reale. Să se arate că funcţia limită $f(x)$ este continuă pentru toate valorile iraţionale.

R: Vom arăta folosind criteriul general al lui Cauchy că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N(\varepsilon)$ astfel încît pentru orice $n > N(\varepsilon)$ şi $p \geqslant 1$

$$|f_{n+1}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon$$

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+p}(x)| = \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} \frac{ix - E(ix)}{2^i} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=n+1}^{n+p} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{n+1}} \left[1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{p-1}} \right]$$

Am folosit la majorare faptul că $x - 1 < E(x) < x$, de unde $0 < x - E(x) < 1$.

În continuare obţinem

$$|f_{n+1}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \left(2 - \frac{1}{2^{p-1}}\right) < \frac{1}{2^n}$$

și, deoarece $\frac{1}{2^n} \to 0$ cînd $n \to \infty$, rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N(\varepsilon)$ obținut din $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$, $2^n > \frac{1}{\varepsilon}$ $n > \frac{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\ln 2}$ și $N(\varepsilon) = 1 + \mathrm{E}\left(\frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}\right)$.

O b s e r v a ț i e. Funcția $x - \mathrm{E}(x)$ este o funcție periodică de perioadă 1 și deci este suficient s-o studiem într-un interval de lungime perioada, de exemplu $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Funcția $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{kx - \mathrm{E}(kx)}{2^k}$ este discontinuă numai în punctele în care $kx = k^*$ (k întreg), adică $x = \frac{k^*}{k}$ (k, k^* întregi).

În punctele iraționale funcțiile $f_n(x)$ ale șirului sînt funcții continue și deoarece șirul este uniform convergent, rezultă că funcția limită este o funcție continuă.

7. Se dă șirul de funcții

$$f_n(x) = |x|^{1+\frac{1}{n}}, \quad x \in R, \quad n \in N$$

a) Să se reprezinte grafic funcțiile din șir.

b) Se poate aplica teorema privind derivarea termen cu termen a șirului $(f_n(x))_{n \in N}$?

R: $f_n(x) = f_n(-x)$ și deci funcția este pară.

Considerăm $x \in (0, \infty)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$

$$f_n'(x) = \left(1 + \frac{1}{n}\right) x^{\frac{1}{n}} \to 0, \quad f_n''(x) = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n} - 1}, \quad x \in (0, \infty)$$

Observăm că $f_{n+1}(x) < f_n(x)$, $x > 1$ și $f_{n+1}(x) > f_n(x)$, $x < 1$
De asemenea pentru $x = 1$, $f_n(1) = 1$, $n \in N$.

Graficul este reprezentat în figura 11.

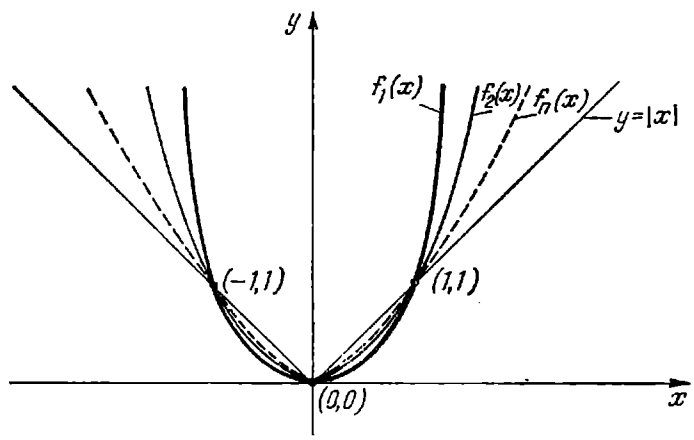

Fig. 11

b) Se observă că $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = |x|$, $x \in R$,

care nu este o funcție derivabilă în $x = 0 \in [-1, 1]$ deci teorema nu se aplică.

8. Se poate aplica teorema privind derivarea termen cu termen a șirului de funcții

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2x^2}, \quad \text{pe intervalul } [-1, \ +1]?$$

R: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) \equiv 0$, $x \in [-1, 1]$.

Formăm șirul derivatelor

$$f_n'(x) = \frac{1 - n^2x^2}{(1 + n^2x^2)^2}, \quad x \in [-1, \ 1]$$

Șirul $f_n'(x) \to \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & |x| < 1 \end{cases}$

El nu este uniform convergent pe $[-1, +1]$ și deci nu se poate aplica pe acest interval teorema privind derivabilitatea termen cu termen.

9. Să se arate că șirul $(f_n(x))_{n\in N}$ $f_n(x) = nx(1-x)^n$ $n = 1, 2, \ldots$ nu este uniform convergent pe $[0,1]$ totuși

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx$$

R: Șirul $f_n(x)$ converge către funcția $f(x) = 0$ pentru $x \in [0,1]$ dar convergența nu este uniformă deoarece pentru șirul de puncte $x_n = \frac{1}{n}$ care tinde la 0

$$f_n(x_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} \neq 0$$

Verifică afirmația din enunț:

$$n\int_0^1 x(1-x)^n\, dx = n\int_0^1 (x-1)(1-x)^n\, dx + n\int_0^1 (1-x)^n .\, dx =$$

$$= -n\int_0^1 (1-x)^{n+1}\, dx + n\int_0^1 (1-x)^n\, dx =$$

$$= + n\frac{(1-x)^{n+2}}{n+2}\Big|_1^0 - n\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = -\frac{n}{n+2} + \frac{n}{n+1} = \frac{n}{(n+1)(n+2)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = 0 \text{ și, deoarece}$$

$$f(x) \equiv 0, \quad \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = 0$$

și relația este verificată.

10. Să se arate că șirul de funcții cu variație mărginită $f_n(x) = \frac{\sin 2n\pi x}{\sqrt{n}}$, $n \in N$, $x \in [0,1]$ converg uniform către o funcție cu variație mărginită dar șirurile variațiilor totale nu converg către variația totală a funcției limită.

R: Observăm că $|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$ și $\frac{1}{\sqrt{n}}$ este termenul general al unui șir numeric convergent la zero.

De aici rezultă că șirul $f_n(x)$ este uniform convergent.

Funcțiile $f_n(x)$ sînt cu variație mărginită, deoarece $f_n'(x) = 2\sqrt{n}\,\pi \cdot \cos 2n\pi x$, $x \in [0,1]$ este mărginită

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \text{ deci } f(x) = 0.$$

Să calculăm șirul variațiilor totale. Variația totală a funcției $f_n(x)$ este

$$\bigvee_0^1 f_n(x) = \int_0^1 |f_n'(x)|\,dx = 2\sqrt{n}\,\pi \int_0^1 |\cos 2n\pi x|\,dx.$$

Dar

$$\cos 2n\pi x \geqslant 0, \frac{4k-1}{4n} \leqslant x \leqslant \frac{4k+1}{4n}, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$$

$$\cos 2n\pi x \leqslant 0, \quad \frac{4k+1}{4n} \leqslant x \leqslant \frac{4k+3}{4n}; \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$$

deci:

$$\bigvee_0^1 f_n(x) = 2\sqrt{n}\,\pi\left[\int_0^{\frac{1}{4n}} \cos 2n\pi x\,dx - \int_{\frac{1}{4n}}^{\frac{3}{4n}} \cos 2n\pi x\,dx + \right.$$

$$\left. + \int_{3/4n}^{5/4n} \cos 2n\pi x\,dx \ldots + \int_{1-1/4n}^{1} \cos 2n\pi x\,dx\right] = \frac{1}{\sqrt{n}}(2+2n) = \frac{2(n+1)}{\sqrt{n}}.$$

Deci șirul $\left(\bigvee_0^1 f_n(x)\right)_{n\in N}$, este $\left(\frac{2(n+1)}{\sqrt{n}}\right)_{n\in N}$, care este divergent.

11. *Funcția în salturi.* Fie $[a, b]$ un interval și următoarele trei șiruri de numere $(a_n)_{n\in N}$, $(\alpha_n)_{n\in N}$, $(\beta_n)_{n\in N}$ care satisfac următoarele condiții

1°) $a_n \in [a, b]$

2°) $\sum_1^\infty |\alpha_n| < \infty$, $\sum_1^\infty |\beta_n| < \infty$

Cu ajutorul lor să definim șirul de funcții $(f_n)_{n\in N}$ pe $[a, b]$ cu valori în R astfel

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x < a_n \\ \alpha_n, & x = a_n \\ \alpha_n + \beta_n, & x > a_n \end{cases}$$

Funcţia f: $[a, b] \to R$ definită de

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

este o funcţie *de salturi*. Să se arate că f este cu variaţia mărginită pe $[a, b]$

R: Avem

$$|f_n(x)| \leqslant |\alpha_n| + |\beta_n|, \quad x \in [a, b]$$

şi conform lui (2) rezultă că seria $\sum_{1}^{\infty} f_n(x)$ este absolut şi uniform convergentă pe $[a, b]$. Funcţia $f_n(x)$ este continuă pe $[a, b] - \{a_n\}$ deci f este continuă pe $[a, b] - \{a_1, a_2, \ldots\}$.

Avem

$$f_n(a_n + 0) - f(a_n) = \alpha_n,$$
$$f_n(a_n) - f(a_n - 0) = \beta_n,$$

deci $f_n(x + 0) - f(x_n - 0) = \alpha_n + \beta_n$. Să punem

$$(1) \qquad \gamma = \sum_{1}^{\infty} |\alpha_n| + \sum_{1}^{\infty} + |\beta_n| < \infty$$

Fie d o diviziune a intervalului $[a, b]$ cu $2m$ subintervale dată de

$$a = x_0 < x_1 < a_1 < x_2 < \ldots < a_m < x_{m+1} = b;$$

obţinem, $n > m$

$$|f(a_i) - f(x_i)| = \left| \alpha_i + \sum_{a_n \in (x_i, a_i)} (\alpha_n + \beta_n) \right| \geqslant$$

$$\geqslant |\alpha_i| - \sum_{a_n \in (x_i, a_i)} (|\alpha_n| + |\beta_n|)$$

şi

$$|f(x_{i+1}) - f(a_i)| = \left| \beta_i + \sum_{a_n \in (a_i, x_{i+1})} (\alpha_n + \beta_n) \right| \geqslant$$

$$\geqslant \left| \beta_i | - \sum_{a_n \in (a_i, x_{i+1})} (|\alpha_n| + |\beta_n|) \right|$$

şi ţinînd seamă de (1), ε fiind dat, că rezultă m astfel încît

$$V_d(f) < \gamma - \varepsilon$$

Pe de altă parte, pentru orice diviziune d^* definită de punctele

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_s = b$$

$$V_{d^*}(f) \leqslant \gamma$$

de unde obţinem că $\bigvee_a^b (f) = \gamma$, deci f este cu variaţie mărginită şi variaţia totală este dată de γ.

12. Fie f o funcție continuă pe [0,1] și $B_n(x)$ șirul de polinoame (Bernstein) asociate funcției f

$$B_n(x) = \sum_{m=0}^{n} f\left(\frac{m}{n}\right) C_n^m x^m (1-x)^{n-m}, \quad x \in [0,1]$$

Să se arate că șirul $B_n(x)$ converge uniform pe [0,1] către $f(x)$.

R: Folosim rezultatele de la problema 4, capitolul IV. Fie $\delta > 0$ oarecare și $x \in [0,1]$. Să notăm

$$S_1 = \Sigma_1 C_n^m x^m (1-x)^{n-m}, \quad S_2 = \Sigma_2 C_n^m x^m (1-x)^{n-m}$$

unde în S_1 sumarea se face pentru m astfel încît $\left|\frac{m}{n} - x\right| < \delta$ iar în S_2 pentru $\left|\frac{m}{n} - x\right| \geqslant \delta$. Avem deci $S_1 + S_2 = 1$.

Putem scrie

$$S_2 = \Sigma_2 C_n^m x^m (1-x)^{n-m} \leqslant \frac{1}{\delta^2} \Sigma_2 \left(\frac{m}{n} - x\right)^2 C_n^m x^m (1-x)^{n-m} \leqslant$$

(α)

$$\leqslant \frac{1}{\delta^2 n^2} \sum_{m=0}^{n} (m - nx)^2 C_n^m x^m (1-x)^{n-m} \leqslant \frac{1}{\delta^2 n^2} nx(1-x)$$

conform relației (b) din problema amintită. Deoarece $x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$, $x \in [0,1]$, urmează că $S_2 \leqslant \frac{1}{4} \frac{1}{\delta^2 n^2}$.

Să considerăm acum polinomul $B_n(x)$ al lui Bernstein. Avem

$$|B_n(x) - f(x)| = \left|\sum_{0}^{n} f\left(\frac{m}{n}\right) C_n^m x^m (1-x)^{n-m} - f(x)\right| =$$

(β)

$$= \left|\sum_{0}^{n} f\left(\frac{m}{n}\right) C_n^m x^m (1-x)^{n-m} f(x) \sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m (1-x)^{m-n}\right| =$$

$$= \left|\sum_{m=0}^{n} \left[f\left(\frac{m}{n}\right) - f(x) \right] C_n^m x^m (1-x)^{n-m}\right|,$$

deoarece $\sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m (1-x)^{n-m} = 1$. La $\varepsilon > 0$ fie $\delta > 0$ astfel încît

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon \text{ pentru orice } |x' - x''| < \delta,$$

fapt ce se poate deoarece f este şi uniform continuă pe [0,1]. La $\varepsilon > 0$ alegem $\delta(\varepsilon)$ şi îl folosim pentru sumele S_1 şi S_2.
Avem din (β)

$$|B_n(x) - f(x)| \leqslant \Sigma_1 \left| f\left(\frac{m}{n}\right) - f(x) \right| C_n^m x^m (1-x)^{n-m} + \Sigma_2 \left| f\left(\frac{m}{n}\right) \right| + |f(x)|, \quad C_n^m x^m (1-x)^{n-m}$$

şi pentru că $\left| \frac{m}{n} - x \right| < \delta$ în Σ_1 avem

$$(\gamma') \qquad \Sigma_1 \left| f\left(\frac{m}{n}\right) - f(x) \right| C_n^m x^m (1-x)^{n-m} \leqslant \varepsilon \Sigma_1 C_n^m x^m (1-x)^{n-m} \leqslant \varepsilon$$

Pe [0,1] f este continuă, deci mărginită, $|f(x)| < M$.
Folosind pe (α) rezultă

$$\Sigma_2 \left[\left| f\left(\frac{m}{n}\right) \right| + |f(x)| \right] C_n^m x^m (1-x)^{n-m} < 2M \, \Sigma_2 C_n^m x^m (1-x)^{n-m} \leqslant \frac{M}{2\delta^2 n}$$

şi dacă luăm $n \geqslant \frac{M}{2\delta^2 \varepsilon}$, obţinem

$$(\gamma'') \qquad \Sigma_2 \left[f\left(\frac{m}{n}\right) + \left| f(x) \right| \right] C_n^m x^m (1-x)^{n-m} < \varepsilon$$

din (γ') şi (γ'') şi (β) obţinem imediat

$$|B_n(x) - f(x)| < 2\varepsilon, \quad n > \frac{M}{2\delta^2 \varepsilon}$$

şi pentru că δ depinde numai de ε şi M numai de f, urmează că neegalitatea este adevărată pentru orice $x \in [0,1]$ ceea ce asigură convergenţa uniformă a şirului.

13. Să se calculeze polinomul de interpolare al lui Lagrange pentru funcţia $f(x) = |x|$ pe segmentul $[-1, 1]$, dacă abscisele punctelor de interpolare ale acestui polinom sînt $x_i = 0, \ \pm\frac{1}{2}, \ \pm 1$.

R: Polinomul lui Lagrange de aproximare a funcţiei $f(x)$ este:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} f(x_i)$$

În acest caz $n = 4$ şi $f(0) = 0$, $f\left(\pm\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, $f(\pm 1) = 1$.

Înlocuind (cu $x_0 = -1$, $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = 1$) obţinem:

$$P_4(x) = \frac{2x\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)(x-1)}{3} - \frac{4}{3} x\left(x - \frac{1}{2}\right)(x^2-1) +$$

$$+ \frac{4}{3} x\left(x + \frac{1}{2}\right)(x^2-1) + \frac{2}{3} x\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)(x+1) = \frac{x^2[7 - 4x^2]}{3}$$

14. Se dă seria de funcţii

$$\frac{\sin x}{2^4}+\frac{\sin 2x}{4^4}+\ldots+\frac{\sin nx}{(2n)^4}+\ldots,\quad x\in R$$

şi se cere să se arate că este absolut şi uniform convergentă pe R. Aceeaşi problemă pentru seria derivatelor.

R: Deoarece $|\sin kx|\leqslant 1$, $x\in R$, $k\in R$ urmează că $\left|\frac{\sin nx}{(2n)^4}\right|\leqslant\frac{1}{(2n)^4}$, deci seria din enunţ admite majorantă seria

$$\frac{1}{2^4}+\frac{1}{4^4}+\ldots+\frac{1}{(2n)^4}+\ldots$$

care este convergentă, fiind comparabilă cu o serie Riemann cu $\alpha=4$; rezultă că seria din enunţ este absolut şi uniform convergentă pe R. Întrucît toţi termenii seriei sînt funcţii continue pe R, urmează că suma seriei $S(x)$ este o funcţie continuă pe R.

Seria obţinută cu seria derivatelor

$$(1)\qquad \frac{\cos x}{2^4\cdot 1^3}+\frac{\cos 2x}{2^4\cdot 2^3}+\ldots+\frac{\cos nx}{2^4\cdot n^3}+\ldots$$

admite majorantă pe

$$\frac{1}{2^4\cdot 1^3}+\frac{1}{2^4\cdot 2^3}+\ldots+\frac{1}{2^4\cdot n^3}+\ldots$$

care este de asemenea o serie convergentă, fiind comparabilă cu o serie Riemann cu $\alpha=3$. Seria (1) este aşadar uniform convergentă pe R şi are ca sumă pe $S'(x)$. Seria (1) este şi absolut convergentă.

Seria obţinută cu derivatele de ordinul doi ale termenilor seriei iniţiale este

$$(2)\qquad -\frac{\sin x}{2^4\cdot 1^2}-\frac{\sin 2x}{2^4\cdot 2^2}-\ldots-\frac{\sin nx}{2^4\cdot n^2}-\ldots$$

care admite majorantă seria convergentă

$$\frac{1}{2^4\cdot 1^2}+\frac{1}{2^4\cdot 2^2}+\ldots+\frac{1}{2^4\cdot n^2}+\ldots$$

prin urmare seria (2) este uniform (şi absolut) convergentă, deci are ca sumă pe $S''(x)$.

Seria obţinută cu derivatele de ordinul trei este

$$(3)\qquad -\frac{1}{2^4}\left(\frac{\cos x}{1}+\frac{\cos 2x}{2}+\ldots+\frac{\cos nx}{n}+\ldots\right)$$

poate fi studiată cu ajutorul criteriului lui N. Abel. În adevăr avem

$$1 + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\cos \frac{nx}{2} \sin \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}}$$

deci aceste sume parțiale sînt mărginite pentru $\frac{x}{2} \neq k\pi$ și pentru că $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, urmează că seria (3) este convergentă pe $R - \{2k\pi\}$, însă nu putem afirma că este uniform convergentă.

15. Să se arate că seria $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2 + n}{n^2}$ converge uniform pe orice segment $[\alpha, \beta] \subset R$ dar nu converge absolut pentru nici o valoare a lui x.

R: Restul seriei

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{p=n+1}^{\infty} (-1)^p \frac{x^2 + p}{p^2} \right| \leqslant \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{x^2 + p}{p^2}, \quad x \in [\alpha, \beta]$$

Putem majora și, în acest caz

$$|R_n(x)| \leqslant \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{\beta^2 + p}{p^2} \leqslant \beta^2 \sum_{p+n+1}^{\infty} \frac{1}{p^2}$$

Dar $\sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{1}{p^2}$ este restul unei serii convergente și deci tinde către zero pentru $n \to \infty$.

Rezultă astfel că seria este uniform convergentă.

Seria nu este absolut convergentă în nici un punct $x \in R$ deoarece este comparabilă cu seria armonică $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ care este divergentă.

16. Fie $I(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ și $(x_n)_{n \in N}$ un șir de numere reale distincte din (a, b).

De asemenea fie $\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|$ o serie convergentă.

Să se arate că

a) $\sum_{n=1}^{\infty} C_n I(x - x_n), \quad (a \leqslant x \leqslant b)$

este uniform convergentă.

b) funcția $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n I(x - x_n)$ este continuă pentru orice $x \neq x_n$.

R: a) Restul acestei serii este dat de:

$$|R_n(x)| = |C_{n+1}I(x - x_{n+1}) + C_{n+2}I(x - x_{n+2}) + \ldots| \leqslant |C_{n+1}| + |C_{n+2}| + \ldots$$

Dar $|C_{n+1}| + |C_{n+2}| + \ldots$ reprezintă restul seriei numerice $\sum_1^\infty |C_n|$ care este convergentă deci el tinde la zero și astfel $|R_n(x)|$ tinde uniform la zero.

Pentru orice $x \neq x_n$, $n = 1, 2, \ldots$ funcțiile:

$$f_n(x) = C_n I(x - x_n)$$

sînt funcții continue pe orice interval ce nu conține pe x_n, deci, cum o serie uniform convergentă de funcții continue are suma o funcție continuă rezultă proprietatea din enunț.

17. a) Să se studieze convergența uniformă a seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} [nxe^{-nx} - (n-1)\,x\,e^{-(n-1)x}], \quad x \in [0, 1]$$

b) Se poate integra termen cu termen seria?

R: a) Suma parțială a seriei de funcții este

$$S_n(x) = xe^{-x} + (2xe^{-2x} - xe^{-x}) + \ldots + (nxe^{-nx} - (n-1)\,xe^{-(n-1)x}) = nxe^{-nx}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) \equiv 0 \text{ pe } [0,1]$$

dar, șirul $S_n(x)$ nu converge uniform deoarece pentru un șir de puncte $x_n = \frac{1}{n}$, $S_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{e} \neq 0$.

Observăm totuși că funcția limită este continuă pe [0,1].

b) Nu putem aplica teorema privind integrarea termen cu termen a unei serii de funcții deoarece seria nu este uniform convergentă. Vom verifica direct.

Dacă integrăm termen cu termen seria pe [0,1] obținem:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 [nxe^{-nx} - (n-1)\,x\,e^{-(n-1)}]\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-(n-1)} - e^{-n}) =$$

$$= (e-1)\sum_1^\infty e^{-n} = 1 \neq 0$$

și, deci seria nu se poate integra termen cu termen.

18. Să se determine mulțimile de convergență ale seriilor de funcții

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\frac{1}{n}\right)^x$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)^x$

R: Din formula lui Taylor rezultă că

$$\frac{1}{2n} < \sin\frac{1}{n} < \frac{1}{n}$$

şi

$$\frac{1}{4n^2} < 1 - \cos\frac{1}{n} < \frac{1}{2n^2}$$

Aplicînd criteriul comparaţiei, seria a) converge pentru $x > 1$ şi seria b) pentru $x > \frac{1}{2}$.

19. Pentru seria de funcţii

$$1 + \sum_1^\infty (-1)^n \frac{n+1}{n^2+n+1} \left(\frac{x^2-2}{1-2x^2}\right)^n, \quad x^2 \neq \frac{1}{2}$$

să se stabilească mulţimea de convergenţă. Să se determine o mulţime de convergenţă uniformă.

R: Dacă notăm

$$\frac{x^2-2}{1-2x^2} = y$$

obţinem seria de puteri

$$1 + \sum_1^\infty (-1)^n \frac{n+1}{n^2+n+1} y^n$$

cu raza de convergenţă $R = 1$ deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$

Pentru a determina mulţimea de convergenţă a seriei din enunţ, este necesar să găsim valorile lui x pentru care

$$-1 < \frac{x^2-2}{1-2x^2} < +1.$$

Obţinem succesiv

$$\frac{x^2-2}{1-2x^2} - 1 = \frac{3x^2-3}{1-2x^2} < 0$$

deci

$$x \in (-\infty, \quad -1) \cup \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup (1, \quad +\infty)$$

apoi

$$\frac{x^2-2}{1-2x^2} + 1 = \frac{-1-x^2}{1-2x^2} > 0$$

de unde

$$x\in\left(-\infty,\quad -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\quad +\infty\right),$$

deci pentru

$$x\in(-\infty,\quad -1)\cup(1,\quad +\infty)$$

seria din enunț este convergentă. Pentru $x=-1$ obținem seria numerică

$$1+\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n^2+n+1}$$

care este convergentă deoarece este o serie alternată și

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2+n+1}=0$$

deci se poate aplica criteriul lui Leibniz. Pentru $x=+1$, același rezultat, deci mulțimea de convergență este

$$\mathfrak{M}=(-\infty,\quad -1]\cup[+1,\quad +\infty).$$

Pe mulțimea de convergență, seria este și uniform convergentă, deoarece

$$\left|1+\sum_{1}^{n}(-1)^p\frac{p+1}{p^2+p+1}\left(\frac{x^2-2}{1-2x^2}\right)^2\right|\leqslant\left|1+\sum_{1}^{n}(-1)^p\frac{p+1}{p^2+p+1}\right|$$

pentru orice $x\in\mathfrak{M}$, însă seria

$$1+\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n^2+n+1}$$

este convergentă, deci avem

$$\left|\sum_{p=n+1}^{\infty}(-1)^p\frac{p+1}{p^2+p+1}\left(\frac{x^2-2}{1-2x^2}\right)^2\right|<\varepsilon$$

pentru orice $x\in\mathfrak{M}$ și $n>N(\varepsilon)$.

20. Se dă seria de puteri

$$1+\sum_{1}^{\infty}\frac{n+1}{(n^3+n+1)^\alpha}\cdot\frac{1}{\ln(n^3+1)}(x^3-2x)^n$$

unde $\alpha\in R$. Să se determine mulțimea de convergență; discuție după parametrul real α.

R: Dacă punem $x^3-2x=y$ obținem seria de puteri

$$1+\sum_{1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{(n^3+n+1)^\alpha}\cdot\frac{1}{\ln(n^3+1)}y^n$$

cu raza de convergență, oricare ar fi $\alpha \in R$,

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{(n^3+n+1)} \cdot \frac{(n+1)^3+n+2}{\sqrt{n+2}} \cdot \frac{\ln((n+1)^2+1)}{\ln(n^2+1)} = 1$$

Trebuie să găsim mulțimea x pentru care

$$-1 < x^3 - 2x < +1 \tag{1}$$

Avem

$$x^3 - 2x - 1 = 0, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad x_3 = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

deci

$$x^3 - 2x - 1 < 0 \quad \text{pentru} \quad x \in (-\infty, \ -1) \cup \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right);$$

avem și

$$x^3 - 2x + 1 = 0, \quad x_1' = 1, \quad x_2' = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \quad x_3' = \frac{-1+\sqrt{5}}{2},$$

deci

$$x^3 - 2x + 1 > 0 \quad \text{pentru} \quad x \in \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \ \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \cup (1, \ \infty),$$

iar inegalitățile (1) sînt satisfăcute pe mulțimea

$$E = \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \ -1\right) \cup \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \ \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(1, \ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

iar seria este convergentă pentru orice $x \in E$ și orice $\alpha \in R$. Rămîne să mai cercetăm convergența seriei pentru închiderea lui E.
În punctele

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \quad \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \quad 1,$$

seria se scrie

$$1 + \sum_1^\infty (-1)^n \frac{\sqrt{n+1}}{(n^3+n+1)^\alpha \ln(n^2+1)}$$

și este convergentă pentru $3\alpha - \frac{1}{2} \geqslant 0$, $\alpha \geqslant \frac{1}{6}$.

În punctele

$$-1, \quad \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \quad \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

seria se scrie

$$1+\sum_{1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{(n^3+n+1)^{\alpha}\ln(n^2+1)}$$

şi este convergentă pentru $3\alpha-\frac{1}{2}>1, \quad \alpha>\frac{1}{2}$

21. Se dă seria de funcţii

$$\Sigma(-1)^n\frac{1}{3^{\frac{n}{2}}\sqrt{1+n^2}}\operatorname{tg}^n x, \quad x\in\left(-\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2}\right)$$

pentru care se cere mulţimea de convergenţă. Aceeaşi problemă pentru seria derivatelor.

R: Dacă facem înlocuirea $\operatorname{tg} x = y$, obţinem seria de puteri

$$\sum_{0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^{\frac{n}{2}}\sqrt{1+n^2}}y^n, \quad y\in R$$

căreia îi determinăm raza de convergenţă. Avem

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{\frac{n+1}{2}}\sqrt{1+(n+1)^2}}{3^{\frac{n}{2}}\sqrt{1+n^2}}=\sqrt{3}.$$

Intervalului $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ îi corespunde pentru x intervalul $\left(-\frac{\pi}{3}, \quad \frac{\pi}{3}\right)$.

Pentru $x=-\frac{\pi}{3}$ obţinem seria $(\alpha)\ \sum_{0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}$, şi, pentru că $\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}>\frac{1}{n+1}$, rezultă că (α) este divergentă. Pentru $x=\frac{\pi}{3}$ obţinem seria $(\beta)\ \sum_{0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}$ care este convergentă, fiind o serie alternată şi $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}=0$, deci se poate aplica criteriul lui Leibniz. Rezultă de aici că mulţimea de convergenţă este $\left(-\frac{\pi}{3}, \quad \frac{\pi}{3}\right]$: Seria obţinută cu derivatele termenilor seriei din enunţ este

$$\frac{1}{\cos^2 x}\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{3^{\frac{n}{2}}\sqrt{n+1}}\operatorname{tg}^{n-1}x, \quad x\in\left(-\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2}\right)$$

şi seria în y ataşată are aceeaşi rază de convergenţă $R=\sqrt{3}$. Un studiu analog arată că mulţimea de convergenţă este $\left(-\frac{\pi}{3}, \quad \frac{\pi}{3}\right)$.

22. Să se determine mulțimea de convergență pentru seria de funcții

$$\sum_0^\infty \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2+n+1}(-1)^n\left(\frac{4x-1}{x+3}\right)^n$$

R: Dacă punem $\frac{4x-1}{x+3}=y$, obținem seria de puteri

$$\sum_0^\infty \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2+n+1}(-1)^n y^n$$

cu raza de convergență $R=1$, deoarece

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n+1}}=1, \quad u_n=\frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2+n+1}$$

Pentru a găsi mulțimea de convergență a seriei inițiale, trebuie să rezolvăm neegalitățile

$$-1<\frac{4x-1}{x+3}<+1$$

Avem

$$\frac{4x-1}{x+3}-1<0, \quad \frac{3x-4}{x+3}<0, \quad x\in\left(-3, \ \frac{4}{3}\right),$$

și

$$\frac{4x-1}{x+3}+1>0, \quad \frac{5x+2}{x+3}>0, \quad x\in(-\infty, \ -3)\cup\left(-\frac{2}{5}, \ +\infty\right)$$

Prin urmare, seria din enunț este convergentă pentru $x\in\left(-\frac{2}{5}, \ \frac{4}{3}\right)$

Pentru $x=-\frac{2}{5}$, obținem seria numerică cu termeni pozitivi

$$\sum_0^\infty \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2+n+1}$$

care este divergentă, deoarece $\frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2+n+1}>\frac{1}{n+2}$

Pentru $x=\frac{4}{3}$, obținem seria alternată

$$\sum_0^\infty (-1)^n\frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2+n+1}$$

care este convergentă conform criteriului lui Leibniz, deoarece

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2+n+1}=0$$

Mulțimea de convergență pentru seria dată este $\left(-\frac{2}{5}, \ \frac{4}{3}\right]$

23. Se dă funcţia

$$f(x) = \ln (x + \sqrt{1 + x^2}), \quad x \in R$$

şi se cere să se dezvolte în serie de puteri ale lui x.

R: Derivăm

$$f'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

Pentru $|x| < 1$, avem

$$(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2 \cdot 1!} x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!} x^4 - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^n \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n - 1)}{2^n n!} x^{2n} + \ldots$$

de unde rezultă prin integrare în $(-1, +1)$

$$\ln (x + \sqrt{1 + x^2}) = C + x - \frac{1}{2 \cdot 1!} \frac{1}{3} x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!} \cdot \frac{1}{5} x^5 - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n - 1)}{2^n n!} \cdot \frac{1}{2n + 1} x^{2n+1} + \ldots$$

Prin integrare a apărut o constantă de integrare C pe care o determinăm observînd că pentru $x = 0$, $f(0) = 0$, deci $C = 0$. Obţinem deci dezvoltarea în serie, $x \in (-1, +1)$,

$$\ln (x + \sqrt{1 + x^2}) = x + \sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n - 1)!!}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{1}{2n + 1} x^{2n+1}$$

24. Să se găsească primii trei termeni ai dezvoltării în serie Mac-Laurin, ai funcţiei

$$f(x) = (1 + \sin x)^x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2}\right)$$

R: Metoda I. Pe $\left(-\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2}\right)$ funcţia f este indefinit derivabilă, deoarece putem scrie

$$f(x) = e^{x \ln (1 + \sin x)}$$

şi $|\sin x| < 1$, pentru orice $[\alpha, \beta] \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2}\right)$.

Avem

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots.$$

$$f(0) = 1$$

$$f'(x) = (1 + \sin x)^x \left[\ln (1 + \sin x) + \frac{x \cos x}{1 + \sin x}\right]$$

deci

$$f'(0) = 0$$

$$f''(x) = (1 + \sin x)^x \left(2 \frac{\cos x}{1 + \sin x} - \frac{x \sin x}{1 + \sin x} - \frac{x \cos^2 x}{(1 + \sin x)^2} \right) +$$

$$+ (1 + \sin x)^x \left(\ln (1 + \sin x) + \frac{x \cos x}{1 + \sin x} \right)^2$$

de unde rezultă

$$f''(0) = 2$$

Primii trei termeni ai dezvoltării în serie de puteri sînt deci $1 + x^2$ (coeficientul lui x este nul).

Metoda II. Pentru $x \in R$, avem

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots;$$

dezvoltarea

$$\ln (1 + \sin x) = \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\sin^3 x}{3} - \ldots$$

este valabilă pentru $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$, deoarece în acest interval $|\sin x| < 1$. Avem

$$x \ln (1 + \sin x) = x \left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \right) -$$

$$- \frac{x}{2} \left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \right)^2 +$$

$$+ \frac{x}{3} \left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \right)^3 = x^2 - \frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{6} x^4 + \ldots$$

Avem şi

$$e^{x \ln (1 + \sin x)} = 1 + \frac{x \ln(1 + \sin x)}{1} + \frac{x^2 \ln^2 (1 + \sin x)}{2!} + \ldots$$

deci

$$(1 + \sin x)^x = 1 + \left(x^2 - \frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{6} x^4 + \ldots \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{6} x^4 + \ldots \right)^2 + \ldots$$

$$(1 + \sin x)^x = 1 + x^2 - \frac{1}{2} x^3 + \frac{2}{3} x^4 + \ldots$$

25. Să se deducă o relaţie de recurenţă pentru coeficienţii seriei de puteri a funcţiei sec x.

R: Funcţia $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$ admite o dezvoltare în serie de puteri după puterile lui x de forma

$$\frac{1}{\cos x} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

dezvoltare valabilă în $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Deoarece funcţia $\frac{1}{\cos x}$ este pară, rezultă că seria ei de puteri va conţine numai puterile pare ale lui x. Deci:

$$1 \equiv (a_0 + a_2 x^2 + \ldots + a_{2n} x^{2n} + \ldots)\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots\right)$$

Identificînd, sîntem conduşi la sistemul infinit de ecuaţii:

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_2 - \frac{a_0}{2!} = 0 \\ a_4 - \frac{a_2}{2!} + \frac{a_0}{4!} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{2n} - \frac{a_{2n-2}}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} a_0 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

relaţia de recurenţă este deci $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} a_{2n-2k} = 0$

Înlocuind în seria de puteri, obţinem

$$\sec x \simeq 1 + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{24} x^4 + \ldots \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

26. Să se dezvolte funcţia $f(x) = \ln x$ într-o serie de puteri după puterile întregi pozitive ale funcţiei $\frac{x-1}{x+1}$, $x > 0$.

R: Vom nota $\frac{x-1}{x+1} = y$, de unde $x = \frac{1+y}{1-y}$. Pentru $x > 0$, $y \in (-1, 1)$.

Cu aceasta

$$\ln x \to \ln \frac{1+y}{1-y} = \ln(1+y) - \ln(1-y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{y^n}{n} + \ldots$$

$$+ \left(y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \ldots + \frac{y^n}{n} + \ldots\right) = 2\left(y + \frac{y^3}{3} + \ldots + \frac{y^{2p+1}}{2_{p+1}} + \ldots\right), \quad |y| < 1$$

Revenind la x, obținem:

$$\ln x = 2\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2p+1}\left(\frac{(x-1)}{x+1}\right)^{2p+1}, \quad x>0$$

27. Să se obțină dezvoltarea în serie de puteri pentru funcția:

$$f(x) = \frac{\operatorname{ch}\sqrt{x}}{1-x}, \quad 0 \leqslant x < 1.$$

R: Folosim dezvoltările funcțiilor:

$$\operatorname{ch}\sqrt{x} = \frac{e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}}{2} = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{(2n)!} + \ldots, \quad x>0$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots \mid x \mid < 1$$

Pentru a stabili seria lui $f(x)$, facem produsul celor două serii și obținem

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{(2n)!}\right)x^n, \quad x \in (0,\ 1)$$

28. Să se dezvolte în serie de puteri (ale lui x) funcția $f(x) = (\operatorname{arc\,sin} x)^2$ $x \in R$.

R: Deoarece seria de puteri (ale lui x) a unei funcții coincide cu seria sa Mac-Laurin, vom determina derivata de ordinul n pentru funcția $f(x)$.

Avem $f'(x) = 2\,\dfrac{\operatorname{arc\,sin} x}{\sqrt{1-x^2}}; \quad x \neq \pm 1$

$$f''(x) = \frac{2}{1-x^2} + 2\operatorname{arc\,sin} x \cdot \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}, \quad x \neq \pm 1$$

Obținem relația

$$(1-x^2)\,f''(x) = 2 + xf'(x), \quad x \neq \pm 1,$$

deci funcția $f(x)$ admite derivate de orice ordin pentru $x \in (-\infty, -1)$, $x \in (-1, 1)$ sau $x \in (1, \infty)$.

Căutăm o formulă de recurență pentru calculul lui $f(x)$; derivînd de n ori relația de mai sus, avem:

$$f^{(n+2)}(x)(1+x^2) + C_n^1(-2x)\,f^{(n+1)}(x) + C_n^2(-2)\,f^{(n)}(x) =$$

$$= + x\,f^{(n+1)}(x) + C_n^1 f^{(n)}(x)$$

pentru $x = 0$, relația de mai sus devine:

$$f^{(n+2)}(0) = nf^{(n)}(0); \qquad n>0.$$

Deoarece $f'(0) = 0$, $f^{(2)}(0) = 2$;

$$f^{(2p+1)}(0) = 0; \quad f^{(2p)}(0) = (2p-2)!!$$

înlocuind în seria Mac-Laurin, obţinem

$$f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(2p-2)!!}{(2p)!} x^{2p} \quad |x| < 1$$

29. Să se dezvolte în serie de puteri după puterile lui x funcţia

$$f(x) = \ln(1 - 2x\cos\alpha + x^2), \quad x \in R, \quad \alpha \neq K\pi$$

în intervalul $(-1, +1)$.

R: Calculăm derivata funcţiei. Avem:

$$f'(x) = \frac{2x - 2\cos\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2}$$

sau

$$f'(x) = 2(x - \cos\alpha) \frac{1}{(x - \cos\alpha - i\sin\alpha)(x - \cos\alpha + i\sin\alpha)}$$

Să notăm $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$, $\bar{z} = \cos\alpha - i\sin\alpha$. Avem

$$f'(x) = \frac{2(x - \cos\alpha)}{2i\sin\alpha} \left[\frac{1}{x - z} - \frac{1}{x - \bar{z}}\right]$$

Pentru a dezvolta funcţia din paranteză după puterile lui x, punem derivata $f'(x)$ sub forma:

$$f'(x) = \frac{(x - \cos\alpha)}{i\sin\alpha}\left[-\bar{z}\frac{1}{1 - x\bar{z}} + z\frac{1}{1 - xz}\right]$$

Punînd condiţiile $|x\bar{z}| < 1$ şi $|xz| < 1$.

$$f'(x) = \frac{x - \cos\alpha}{i\sin\alpha}[z(1 + xz + x^2z^2 + \ldots + x^nz^n + \ldots) - \bar{z}(1 + x\bar{z} +$$

$$+ x^2\bar{z}^2 + \ldots + x^n\bar{z}^n + \ldots)], \quad |x| < 1$$

(deoarece $|z| = |\bar{z}| = 1$).

Aceasta se mai poate scrie:

$$f'(x) = \frac{x - \cos\alpha}{i\sin\alpha}[z - \bar{z} + x(z^2 - \bar{z}^2) + \ldots + x^n(z^{n+1} - \bar{z}^{n+1}) +]$$

deoarece

$$z^k - \bar{z}^k = \cos k\alpha + i\sin k\alpha - \cos k\alpha + i\sin k\alpha = 2i\sin k\alpha.$$

Avem

$$f'(x) = \frac{x - \cos\alpha}{i\sin\alpha}[2i\sin\alpha + 2ix\sin 2\alpha + \ldots + 2ix^n\sin(n+1)\alpha + \ldots] =$$

$$= \frac{2(x - \cos\alpha)}{\sin\alpha}[\sin\alpha + x\sin 2\alpha + \ldots + x^n\sin(n+1)\alpha + \ldots] =$$

$$= \frac{2}{\sin\alpha}[-\sin\alpha\cos\alpha + x(\sin\alpha - \sin 2\alpha\cos\alpha) + \ldots$$

$$\ldots + x^n(\sin n\alpha - \sin(n+1)\alpha\cos\alpha) + \ldots$$

dezvoltare valabilă pentru $|x|<1$, sau încă

$$f'(x) = -2[\cos\alpha + x\cos^2\alpha + \ldots + x^n \cos n\alpha + \ldots]$$

Integrînd:

$$f(x) = C - 2\left[x\cos\alpha + \frac{x^2}{2}\cos 2\alpha + \ldots + \frac{x^{n+1}}{n+1}\cos n\alpha + \ldots\right], \quad |x|<1$$

pentru $x = 0, \quad C = 0$

deci:

$$f(x) = -2\left(x\cos\alpha + \frac{x^2}{2}\cos 2\alpha + \ldots + \frac{x^{n+1}}{n+1}\cos n\alpha + \ldots\right)$$

30. Să se găsească cos 89°30′ cu cinci zecimale exacte.

R: Avem

$$\cos 89°30' = \sin 30' = \sin\frac{\pi}{360}.$$

Folosim dezvoltarea în serie a lui sin x

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\sin 30' = \frac{\pi}{360} - \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{\pi}{360}\right)^3 + \frac{1}{120}\cdot\left(\frac{\pi}{360}\right)^5 - \ldots$$

se obține o serie alternată. Eroarea este dată în acest caz de primul termen neglijat. Deoarece.

$$\frac{1}{120}\cdot\left(\frac{\pi}{360}\right)^5 < \frac{1}{10^5}$$

urmează că

$$\sin 30' \simeq \frac{\pi}{360} - \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{\pi}{360}\right)^3$$

În calcule se va lua π cu șase zecimale exacte.

31. Să se calculeze

$$1 = \sqrt[5]{100\cdot 003}$$

cu 15 zecimale exacte.

R: Folosim formula

$$(1+x)^\lambda = 1 + \frac{\lambda}{1!}x + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)}{n!}x^n +$$

seria din partea a doua fiind convergentă pentru $|x|<1$ și $\lambda\in R$.
Dacă scriem

$$\sqrt[5]{100\cdot 003} = (10^5+3)^{\frac{1}{5}} = 10\left[1 + \frac{3}{10^5}\right]^{\frac{1}{5}}$$

obținem

$$10\left[1+\frac{3}{10^5}\right]^{\frac{1}{5}}=10\left[1+\frac{1}{5\cdot 1!}\cdot\frac{3}{10^5}-\frac{1\cdot 4}{5^2\cdot 2!}\cdot\frac{3^2}{10^{10}}+\right.$$

$$\left.+\frac{11\cdot 4\cdot 9}{5^3\cdot 3!}\cdot\frac{3^3}{10^{15}}-\frac{1\cdot 4\cdot 9\cdot 14}{5^4\cdot 4!}\cdot\frac{3^4}{10^{20}}+\cdots\right]$$

pentru a calcula pe 1 cu 15 zecimale exacte este suficient să ne oprim cu însumarea la termenul patru, deoarece, seria din partea a doua fiind alternată, eroarea este dată de primul termen neglijat, anume termenul

$$u^5=-10\,\frac{1\cdot 4\cdot 9\cdot 14}{5^4\cdot 4!}\cdot\frac{3^4}{10^{20}}$$

și avem $|u_5|<\frac{1}{10^{15}}$ cum se poate verifica imediat. Suma primilor patru termeni cu 15 zecimale exacte este

$$1=10{,}00006+0{,}00000000072+0{,}00000000000001296=$$

$$=10{,}00006000072001296\ldots$$

deci 1 cu 15 zecimale exacte prin exces, este dat de

$$1\simeq 10{,}000060000720013$$

32. Folosind o serie de puteri convenabil aleasă, să se calculeze $\frac{1}{\sqrt{e}}$ cu șase zecimale exacte.

R: Plecăm de la seria de puteri

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,\quad x\in R$$

Făcînd pe $x=-\frac{1}{2}$, obținem

$$e^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2\cdot 1!}+\frac{1}{4\cdot 2!}-\ldots\frac{(-1)^n}{2^n\cdot n!}+\ldots$$

o serie numerică alternată. Eroarea pe care o comitem dacă într-o serie alternată însumăm primii n termeni este inferioară primului termen neglijat.

Cîți termeni trebuie să însumăm pentru ca

$$\frac{1}{2^n\cdot n!}<\frac{1}{10^6}$$

găsim prin încercări $n=7$, deci

$$e^{-\frac{1}{2}}\simeq 1-\frac{1}{2\cdot 1!}+\frac{1}{4\cdot 2!}-\frac{1}{8\cdot 3!}+\frac{1}{16\cdot 4!}-\frac{1}{32\cdot 5!}+\frac{1}{64\cdot 6!}\simeq 0{,}604188$$

33. La un mecanism bielă-manivelă, poziția capului de cruce este dată de

$$x = l(\lambda \cos \delta - \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \delta})$$

Să se arate că putem scrie

$$x \simeq l\left(\frac{1}{4}\lambda^2 - 1 + \lambda \cos \delta - \frac{1}{4}\lambda^2 \cos 2\delta\right)$$

pentru $\frac{r}{l}$ suficient de mic.

R: Pentru $\frac{r}{l} < 1$, $\lambda^2 \sin^2 \delta < 1$, deci avem

$$(1 - \lambda^2 \sin^2 \delta)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 \sin^2 \delta - \frac{1}{2!2^2}\lambda^2 \sin^4 \delta + \ldots =$$

$$= 1 - \frac{1}{4}\lambda^2(1 - \cos 2\delta) - \frac{1}{8}\lambda^4 \sin^4 \delta + \ldots$$

sau, oprindu-ne la puterea a doua a lui λ:

$$x \simeq l\left(\lambda \cos \theta - 1 + \frac{\lambda^2}{4} + \lambda \cos 2\delta\right).$$

34. Să se calculeze

$$S = \sum_{m=2}^{\infty}\left(\frac{1}{m}\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{1}{n}\right)^m\right)$$

R: Vom scrie:

$$S = \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^m \cdot \frac{1}{m} = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\ln \frac{n}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$

deoarece

$$\ln(1 - x) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}, \quad |x| < 1$$

$$S = \lim_{n \to \infty}\left(\sum_{k=2}^{n}\ln \frac{k}{k-1} - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\right) =$$

$$= \lim_{n \to \infty}\left[1 - \left(\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} - \ln k\right)\right] = 1 - \gamma$$

unde γ este constanta lui Euler.

35. Să se calculeze suma seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n/e)^{n-1}}{n!}$$

R: Să considerăm suma:

$$S(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{x}{(1+x)(2+x)} + \frac{x^2}{(1+x)(2+x)(3+x)} + \cdots$$

Dezvoltînd în fracții simple

$$S(x) = \frac{1}{1+x} + \left(\frac{2}{2+x} - \frac{1}{1+x}\right) + \left(\frac{1}{2(1+x)} - \frac{2^2}{2+x} + \frac{3^2}{2(3+x)}\right) +$$

$$+ \left(-\frac{1}{3!(1+x)} \cdots\right) =$$

$$= \frac{1}{1+x}\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \cdots\right) + \frac{2^2}{2!(2+x)}\left(1 - \frac{1}{2!} + \cdots\right) =$$

$$= \frac{e^{-1}}{1+x} + \frac{2^2}{2!} \cdot \frac{e^{-2}}{2+x} + \frac{3^3}{3!} \cdot \frac{e^{-3}}{3+x} + \cdots$$

luăm $x = 0$ și înmulțind cu e, obținem:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n/e)^{n-1}}{n!} = e.$$

36. Să se arate că ecuația:

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{3n}}{(2n)!} = 0$$

nu are rădăcini reale.

R: Această ecuație ar putea avea eventual rădăcini negative. Fie $x = -y$, atunci

$$1 - y + \frac{y^2}{2!} - \frac{y^3}{3!} + \ldots + \frac{y^{2n}}{(2n)!} > e^{-y} > 0$$

deoarece

$$e^{-y} = 1 - y + \frac{y^2}{2!} + \ldots + \frac{y^{2n}}{2n!} - \left(\frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{y^{2n+2}}{(2n+2)!}\right) \cdots$$

și parantezele sînt pozitive, pentru că $(2n+2) > y$, pentru n suficient de mare. Deci, ecuația nu admite nici o rădăcină reală.

37. Fie $f(x)$ o funcție continuă periodică, de perioadă 2, definită pe $[-1, +1]$ astfel (figura 12)

$$f(x) = \begin{cases} +1, & -1 \leqslant x \leqslant -\frac{2}{3} \\ -3x - 1, & -\frac{2}{3} \leqslant x \leqslant -\frac{1}{3} \\ 0, & -\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{1}{3} \\ 3x - 1, & \frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{2}{3} \\ 1, & \frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

Să se arate că curba definită pentru $t\in[0,1]$ prin

$$(\alpha)\begin{cases} x(t)=\frac{1}{2}f(t)+\frac{1}{2^2}f(3^3t)+\ldots+\frac{1}{2^n}f(3^{3n-3}t)+\ldots \\ y(t)=\frac{1}{2}f(3t)+\frac{1}{2^2}f(3^4t)+\ldots+\frac{1}{2^n}f(3^{3n-2}t)+\ldots \\ z(t)=\frac{1}{2}f(3^2t)+\frac{1}{2^2}f(3^5t)+\ldots+\frac{1}{2^n}f(3^{3n-1}t)+\ldots \end{cases}$$

trece prin toate punctele cubului $K:[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$.

R: Toţi termenii seriilor sînt funcţii continue, deoarece f este funcţie continuă. Deoarece $f(R)\subset[0,1]$ urmează că seriile lui x, y, z sînt majorate de seria numerică

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

convergentă, deci sînt absolut şi uniform convergente pentru $t\in[0,1]$ prin urmare $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ sînt continue pe $[0,1]$ şi

$$0\leqslant x(t)\leqslant 1,\quad 0\leqslant y(t)\leqslant 1,\quad 0\leqslant z(t)\leqslant 1.$$

Fie (x_0, y_0, z_0) un punct oarecare al cubului K; într-o reprezentare în baza 2 numerele x_0, y_0, z_0 le scriem:

$$x_0=\frac{1}{2}a_0+\frac{1}{2^2}a_3+\ldots+\frac{1}{2^n}a_{3n-3}+\ldots$$

$$y_0=\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{2^2}a_4+\ldots+\frac{1}{2^n}a_{3n-2}+\ldots$$

$$z_0=\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{2^2}a_5+\ldots+\frac{1}{2^n}a_{3n-1}+\ldots$$

cu $a_n=0$ sau $a_n=1$. Fie

$$t_0=\frac{2}{3}a_0+\frac{2}{3^2}a_1+\ldots+\frac{2}{3^n}a_{n-1}+\ldots$$

evident $t\in[0,1]$. Să arătăm că $x(t_0)=x_0$, $y(t_0)=y_0$, $z(t_0)=z_0$.

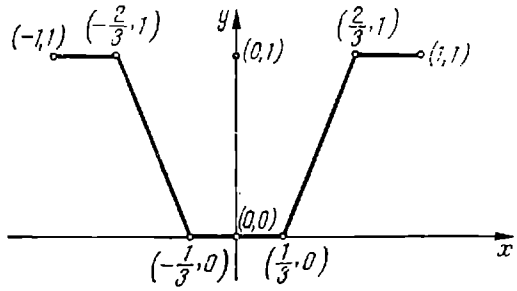

Fig. 12

Pentru $n=0, 1, 2, \ldots$, avem

$$3^nt_0=2p+\frac{2}{3}a_n+\frac{2}{3^2}a_{n-1}+\ldots$$

cu p întreg. Dacă $a_n=0$, atunci

$$0\leqslant\frac{2}{3}a_n+\frac{2}{3^2}a_{n+1}+\ldots\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2}{3^2}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots\right)=\frac{1}{3}$$

şi, pentru că f este periodică de perioadă 2, urmează $f(3^nt_0)=0$.

Dacă, $a_n = 1$, putem scrie

$$\frac{2}{3} \leqslant \frac{2}{3} a_n + \frac{2}{3^2} a_{n+1} + \ldots \leqslant \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots\right) = 1$$

deci $f(3^n t_0) = 1$, prin urmare în ambele cazuri $f(3^n t_0) = a_n$. Înlocuind pe t_0 în expresiile lui x, y, z obținem imediat

$$x(t_0) = \frac{1}{2} a_0 + \frac{1}{2^2} a_3 + \ldots + \frac{1}{2^n} a_{3n-3} + \ldots = x_0,$$

$$y(t_0) = \frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{2^2} a_4 + \ldots + \frac{1}{2^n} a_{3n-2} + \ldots = y_0,$$

$$z(t_0) = \frac{1}{2} a_2 + \frac{1}{2^2} a_5 + \ldots + \frac{1}{2^n} a_{3n-1} + \ldots = z_0,$$

prin urmare, oricare ar fi $(x_0, y_0, z_0) \in K$, există $t_0 \in [0, 1]$ astfel încît $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, $z(t_0) = z_0$, deci curba reprezentată parametric de ecuațiile (x) trece prin toate punctele cubului K. Curba este continuă, deoarece funcțiile care definesc reprezentarea ei parametrică sînt continue. O astfel de curbă se numește curbă Peano.

38. Fie $[x]$ cel mai mare întreg care nu întrece pe x și $\varphi(x) = \left| x - \left[x + \frac{1}{2}\right] \right|$, $x \in R$. Să se arate că funcția

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \varphi(2^k x), \quad x \in R$$

este continuă, dar nu este derivabilă pentru orice $x \in R$. (G. de Rham).

R: Deoarece

$$\left| x - \left[x + \frac{1}{2}\right] \right| \leqslant 1, \quad x \in R$$

urmează că seria care dă pe $f(x)$ admite majorantă seria numerică convergentă

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

Deci este uniform convergentă și, cum φ este continuă, urmează că f este continuă. Graficul funcției φ în $[0, 1]$ este dat în figura 13 și se vede că φ este continuă. Fie intervalul

$$i_n = (2^{-n}[2^n x_0], \quad 2^{-n}[2^n x_0] + 2^{-n}).$$

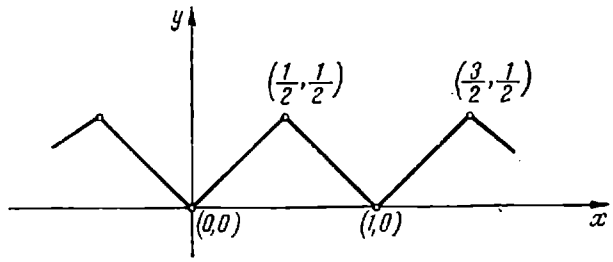

Fig. 13

Funcţia $2^{-k}\varphi(2^k x)$, este liniară în i_{k+1} cu panta egală cu $+1$ sau -1 şi, în plus, se anulează la extremităţile lui i_n. Să observăm că dacă considerăm raportul

$$(\alpha) \qquad \frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1}$$

pentru funcţia $2^{-k}\varphi(2^k x)$ şi x_1, x_2 sînt extremităţile lui i_n, pentru $n \leqslant k$, (α) este nul şi are aceeaşi valoare $+1$ sau -1 dacă $n > k$; prin urmare, diferenţa (α) pentru această funcţie în două intervale consecutive i_n şi i_{n+1} este nulă pentru $k \neq n$ şi are valoarea $+1$ sau -1 pentru $k = n$.

Dacă revenim la funcţia f şi notăm cu r_n raportul (α) pentru intervalul i_n, conform celor de mai sus urmează că $r_{n+1} - r_n = \pm 1$, deci r_n nu are limită.

Fie acum $x_0 \in i_n$; cînd $n \to \infty$, x_1, $x_2 \to x_0$, deci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

nu există. Punctul x_0 fiind arbitrar, f nu este derivabilă în nici un punct din R.

CAPITOLUL VI

FUNCȚII DEFINITE IMPLICIT. EXTREME CU LEGĂTURI. DEPENDENȚE FUNCȚIONALE

1. Se dă ecuația

$$y^2 + x^5 = 1$$

care definește pe y ca funcție de x. Să se cerceteze numărul soluțiilor ecuației, cerînd fie continuitatea, fie unicitatea soluției. În ce condiții $y(x)$ definit de ecuație este derivabilă.

R: Notăm $F(x, y) = y^2 + x^5 - 1$. Avem $y^2 = 1 - x^5$; trebuie ca $1 - x^5 \geqslant 0$, deci $x \in (-\infty, 1]$. Fie $(\alpha, \beta) \subset (-\infty, 1)$. Ecuația admite o infinitate de soluții date de

$$y(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^5}, & x \in (\alpha, \beta), \\ -\sqrt{1 - x^5}, & x \in (-\infty, 1] - (\alpha, \beta) \end{cases}$$

Aceste soluții nu sînt continue, deoarece

$$y(\alpha - 0) = -\sqrt{1 - \alpha^2} \neq y(\alpha + 0) = \sqrt{1 - \alpha^2}.$$

Ecuația dată admite două soluții continue, anume

$$y_1(x) = \sqrt{1 - x^5}, \quad x \in (-\infty, 1)$$

$$y_2(x) = -\sqrt{1 - x^5}, \quad x \in (-\infty, 1]$$

Soluția continuă care satisface condiția inițială $y(0) = 1$, este unică și este dată de

$$y(x) = \sqrt{1 - x^5}, \quad x \in (-\infty, 1]$$

Din teorema de existență rezultă că $y(x)$ este derivabilă dacă $F'_y(x, y) \neq 0$ sau $2y \neq 0$ sau $x \neq 1$, deci mulțimea de derivabilitate este $(-\infty, 1)$. Pe acest interval $y(x)$ este indefinit derivabilă.

2. Se dă ecuația

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$$

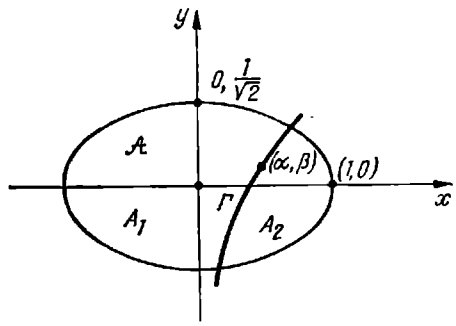

Fig. 14

care definește pe z ca funcție de x și y. Să se studieze soluțiile ecuației după criterii de continuitate, apoi de unicitate. Mulțimea de diferențiabilitate a lui $z(x, y)$?

R: Avem

$$3z^2 = 1 - x^2 - 2y^2$$

prin urmare z există pentru $1 - x^2 - 2y^2 \geqslant 0$, deci pentru (x, y) în discul eliptic

$$(A) \qquad 2y^2 + x^2 \leqslant 1$$

de semiaxe $a = 1$, $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$, figura 14. Dacă considerăm mulțimile A_1, A_2 cu $A_1 \cup A_2 = A$, $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, rezultă:

a) Ecuația dată are o infinitate de soluții pe A date de

$$z(x, y) = \begin{cases} z_1(x,y) = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1 - x^2 - 2y^2}, & (x,y) \in A_1 \\ z_2(x,y) = \frac{-1}{\sqrt{3}}\sqrt{1 - x^2 - 2y^2}, & (x,y) \in A_2 \end{cases}$$

Aceste soluții nu sînt continue, deoarece pentru $(\alpha,\beta) \in \Gamma$ avem $z_1(\alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1 - \alpha^2 - 2\beta^2} \neq z_2(\alpha, \beta) = \frac{-1}{\sqrt{3}}\sqrt{1 - \alpha^2 - 2\beta^2}$.

b) Ecuația admite două soluții continue, anume

$$z_1(x, y) = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1 - x^2 - 2y^2}, \quad (x, y) \in A$$

$$z_2(x, y) = \frac{-1}{\sqrt{3}}\sqrt{1 - x^2 - 2y^2}, \quad (x, y) \in A$$

c) Să punem condiția ca $z\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{6}}$ se obține unica soluție continuă

$$z(x, y) = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1 - x^2 - 2y^2}, \quad (x, y) \in A$$

Din teorema de existență, rezultă că $z(x, y)$ este diferențiabilă dacă $F'_z(x, y) \neq 0$ sau $6z \neq 0$, deci $1 - x^2 - 2y^2 \neq 0$, prin urmare mulțimea de diferențiabilitate a lui $z(x, y)$ este $x^2 + 2y^2 < 1$.

3. Se dă sistemul

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 + 6z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 2z^2 \end{cases}$$

şi să se discute mulţimea soluţiilor, după condiţiile de continuitate, apoi de unicitate.

R: Dacă eliminăm pe z între cele două relaţii obţinem elipsa

$$4x^2 + 9y^2 = 1$$

iar dacă luăm pe x variabila independentă, urmează că y există pentru $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Dacă eliminăm pe y între ecuaţiile din enunţ avem $14z^2 = 1 + 3x^2$, deci z există pentru orice x. Fie $(\alpha, \beta) \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Sistemul dat are o infinitate de soluţii date de

$$y(x) = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{3}\sqrt{1-4x^2}, & x \in (\alpha, \beta) \\ \frac{-\varepsilon}{3}\sqrt{1-4x^2}, & x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] - (\alpha, \beta) \end{cases}$$

$$z(x) = \begin{cases} \frac{\varepsilon'}{\sqrt{14}}\sqrt{1+3x^2}, & x \in (\alpha, \beta), \\ \frac{-\varepsilon'}{\sqrt{14}}\sqrt{1+3x^2}, & x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] - (\alpha, \beta), \end{cases}$$

cu $\varepsilon = \pm 1$, $\varepsilon' = \pm 1$. Soluţiile nu sînt continue, deoarece

$$\lim_{x \to \alpha + 0} y(x) = \frac{\varepsilon}{3}\sqrt{1-4\alpha^2}, \quad \lim_{x \to \alpha - 0} y(x) = \frac{-\varepsilon}{3}\sqrt{1-4\alpha^2}$$

şi

$$y(\alpha + 0) \neq y(\alpha - 0)$$

$$\lim_{x \to \alpha + 0} z(x) = \frac{\varepsilon'}{\sqrt{14}}\sqrt{1+\alpha^2}, \quad \lim_{x \to \alpha - 0} z(x) = \frac{-\varepsilon'}{\sqrt{14}}\sqrt{1+\alpha^2}$$

şi

$$z(\alpha + 0) \neq z(\alpha - 0).$$

Sistemul admite numai patru soluţii continue, anume:

$$(1) \qquad \begin{cases} y_1(x) = \frac{1}{3}\sqrt{1-4x^2}, & x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \\ z_1(x) = \frac{1}{\sqrt{14}}\sqrt{1+3x^2}, & x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} y_2(x) = \frac{1}{3}\sqrt{1-4x^2}, & x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \\ z_2(x) = \frac{-1}{\sqrt{14}}\sqrt{1+3x^2}, & x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \end{cases}$$

(3) $$\begin{cases} y_3(x) = \frac{-1}{3}\sqrt{1-4x^2}, & x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \\ z_3(x) = \frac{1}{\sqrt{14}}\sqrt{1+3x^2}, & x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \end{cases}$$

(4) $$\begin{cases} y_4(x) = \frac{-1}{3}\sqrt{1-4x^2}, & x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \\ z_4(x) = \frac{-1}{\sqrt{14}}\sqrt{1+3x^2}, & x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]. \end{cases}$$

Dacă cerem ca soluția să îndeplinească și condiția $y(0) = \frac{-1}{3}$, $z(0) = \frac{1}{\sqrt{14}}$, obținem soluția unică

$$y(x) = -\frac{1}{3}\sqrt{1-4x^2}, \quad z(x) = \frac{1}{\sqrt{14}}\sqrt{1+3x^2}, \quad x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

4. Să se calculeze $\frac{dy}{dx}$ și $\frac{d^2y}{dx^2}$, pentru y definit de

$$F(\sin x + y, \quad \cos y + x) = 0.$$

R: Presupunem că $F \in C^{(2)}$ în $D \subset R^2$. Să punem

$$\alpha = \sin x + y, \quad \beta = \cos y + x,$$

și derivăm pe F în raport cu x că α și β sînt funcții de x și y, iar y este funcție de x,

(1) $$\frac{\partial F}{\partial \alpha}\left(\cos x + \frac{dy}{dx}\right) + \frac{\partial F}{\partial \beta}\left(1 - \sin y \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

deci pentru

(2) $$\frac{\partial F}{\partial \alpha} - \sin y \frac{\partial F}{\partial \beta} \neq 0,$$

obținem

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos x \frac{\partial F}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial \beta}}{\frac{\partial F}{\partial \alpha} - \sin y \frac{\partial F}{\partial \beta}}.$$

Dacă derivăm încă o dată în raport cu x în (1), obținem

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha}\left(-\sin x+\frac{d^2y}{dx^2}\right)+\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}\left(\cos x+\frac{dy}{dx}\right)^2+$$

$$+2\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial \beta}\left(\cos x+\frac{dy}{dx}\right)\left(1-\sin y\,\frac{dy}{dx}\right)+\frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2}\left(1-\sin y\,\frac{dy}{dx}\right)^2+$$

$$+\frac{\partial F}{\partial \beta}\left(-\sin y\,\frac{d^2y}{dx^2}-\cos y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)=0$$

de unde obținem, condiția (2) fiind îndeplinită, pe $\frac{d^2y}{dx^2}$.

5. Se dă ecuația

$$F(x+2y,\quad y-2x)=1$$

care definește pe y ca funcție de x. În ipoteza că F admite derivate de ordinul doi continue în $D\subset R^2$, să se calculeze y', y''.

R: Să notăm

$$x+2y=\alpha,\qquad y-2x=\beta,$$

și să derivăm în raport cu x ecuația din enunț, ținînd seama că α și β sînt funcții de x și y și y este funcție de x, obținem

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha}\cdot\left(1+2+\frac{dy}{dx}\right)+\frac{\partial F}{\partial \beta}\left(\frac{dy}{dx}-2\right)=0 \tag{1}$$

și pentru

$$2\frac{\partial F}{\partial \alpha}+\frac{\partial F}{\partial \beta}\neq 0$$

obținem

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2\dfrac{\partial F}{\partial \beta}-\dfrac{\partial F}{\partial \alpha}}{2\dfrac{\partial F}{\partial \alpha}+\dfrac{\partial F}{\partial \beta}}$$

dacă mai derivăm o dată pe (1) în raport cu x, ne dă

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}\left(1+2\frac{dy}{dx}\right)^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial \beta}\left(1+2\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dy}{dx}-2\right)+$$

$$+\frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2}\left(\frac{dy}{dx}-2\right)^2+\left(2\frac{\partial F}{\partial \alpha}+\frac{\partial F}{\partial \beta}\right)\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

dacă punem

$$1+2\frac{dy}{dx}=\frac{d\alpha}{dx},\quad \frac{dy}{dx}-2=\frac{d\beta}{dx}$$

obținem

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial \beta} + 2\frac{\partial F}{\partial \alpha}} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial \beta}\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\beta}{dx} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2}\left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2\right]$$

pentru $D^* \subset D$ unde $\frac{\partial F}{\partial \beta} + 2\frac{\partial F}{\partial \alpha} \neq 0$. Se observă că rezultatul obținut poate fi scris și astfel:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \beta} + 2\frac{\partial F}{\partial \alpha}\right) y'' = \left(\frac{d\alpha}{dx}\frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{d\beta}{dx}\frac{\partial}{\partial \beta}\right)^{(2)} F(\alpha, \beta).$$

6. Să se calculeze $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ pentru $z(x, y)$ definit de relația

$$\ln(x^2 + y^2 + z^2) + \arcsin(ax + by + cz) = 1$$

R: Trebuie să avem $x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$ și $-1 \leqslant ax + by + cz \leqslant 1$. Dacă derivăm în raport cu x relația din enunț, rezultă

$$(1) \qquad \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}\left(2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{1 - (ax + by + cz)^2}} \times \right.$$

$$\left. \times \left(a + c\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right) = 0$$

z este diferențiabilă dacă $-1 < ax + by + cz < +1$ și

$$(2) \qquad \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{c}{\sqrt{1 - (ax + by + cz)^2}} \neq 0$$

În această situație avem

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\left(\frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{c}{\sqrt{1 - (ax + by + cz)^2}}\right)^{-1} \times$$

$$\times \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{a}{\sqrt{1 - (ax + by + cz)^2}}\right)$$

Dacă derivăm acum pe (1) în raport cu y, obținem

$$-\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}\left(2y + 2z\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x}\right) +$$

$$+ \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}\left(2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + 2z\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) +$$

$$+ \frac{ax + by + cz}{(1 - (ax + by + cz)^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(b + c\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(a + c\frac{\partial z}{\partial x}\right) +$$

$$+ \frac{c}{(1 - (ax + by + cz)^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

Din această relație obținem pe $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ dacă îl avem pe $\frac{\partial z}{\partial y}$. În acest scop derivăm relația din enunț în raport cu y. Obținem astfel

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\left(\frac{2z}{x^2+y^2+z^2} + \frac{c}{\sqrt{1-(ax+by+cz)^2}}\right) \times$$
$$\times \left(\frac{2y}{x^2+y^2+z^2} + \frac{b}{\sqrt{1-(ax+by+cz)^2}}\right)$$

Se observă că existența lui $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ cere ca relația (2) să fie satisfăcută. În fine, în aceste condiții $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ este și continuă.

7. Să se arate că funcția $z(x, y)$ definită de

$$F(x - az,\ y - bz) = 0$$

$a, b \in R$, $F \in C^{(1)}$ în $D \subset R^2$ verifică relația

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

R: Calculăm pe $\frac{\partial z}{\partial x}$ și $\frac{\partial z}{\partial y}$; punem $u = x - az$, $v = y - bz$

$$\left(1 - a\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial F}{\partial u} - b\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial v} = 0$$

$$-a\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial u} + \left(1 - b\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial F}{\partial v} = 0$$

de unde obținem pentru $a\frac{\partial F}{\partial u} + b\frac{\partial F}{\partial v} \neq 0$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{a\frac{\partial F}{\partial u} + b\frac{\partial F}{\partial v}} \cdot \frac{\partial F}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{a\frac{\partial F}{\partial u} + b\frac{\partial F}{\partial v}} \cdot \frac{\partial F}{\partial v}$$

în $D' \subset D$, unde $a\frac{\partial F}{\partial u} + b\frac{\partial F}{\partial v} \neq 0$ se verifică imediat că derivatele parțiale calculate satisfac relația din enunț.

8. Să se studieze extremele funcției de două variabile $z = z(x, y)$, definită implicit de ecuația

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 - x^2 - z^2$$

R: Condițiile din teorema de existență a acestei funcții sînt îndeplinite, deoarece

$$F(x, y, z) \equiv (x^2 + y^2 + z^2)^2 - a^2 + x^2 + z^2$$

este o funcție continuă cu derivate parțiale continue în R^3.

Rămîne să punem condiţia ca

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 4z(x^2 + y^2 + z^2) + 2z \neq 0$$

ceea ce se întîmplă pentru $z \neq 0$.

Pentru a studia extremele funcţiei $z = z(x, y)$, calculăm derivatele parţiale de ordinul întîi ale acestei funcţii.

Derivînd în ecuaţia dată, obţinem sistemul

$$\begin{cases} 2(x^2 + y^2 + z^2)\left(2x + 2z\dfrac{\partial z}{\partial x}\right) = -2x - 2z\dfrac{\partial z}{\partial x} \\ 2(x^2 + y^2 + z^2)\left(2y + 2z\dfrac{\partial z}{\partial y}\right) = -2z\dfrac{\partial z}{\partial y} \end{cases}$$

de unde

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}\,\frac{2x^2 + 2y^2 + 2z^2}{2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 1}$$

Sistemul admite un singur punct staţionar $x = y = 0$ pentru care $z = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{1 + 4a^2} - 1}{2}}$. Să vedem ce fel de punct este acesta?

Calculăm derivatele parţiale de ordinul doi

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{z} + \frac{x}{z^2}\,\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{x}{z^2}\,\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{z}\,\frac{2x^2 + 2y^2 + 2z^2}{2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 1} + \frac{y}{z^2}\,\frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{2x^2 + 2y^2 + 2z^2}{2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 1}$$

$$-\frac{y}{z}\,\frac{4y + 4z\dfrac{\partial z}{\partial y}}{(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 1)} +$$

$$+\frac{y}{z}\,\frac{\left(2x^2 + 2y^2 + 2z^2)(4y + 4z\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)}{(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 1)^2}$$

În punctul staţionar $x = 0$, $y = 0$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_0 = -\frac{1}{z}, \quad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_0 = 0, \quad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_0 = -\frac{2z^2}{z(1 + 2z^2)}$$

Obţinem că

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = \frac{2}{1 + 2z^2} > 0$$

şi condiţia de extrem este verificată.

Deoarece $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_0 = -\frac{1}{z}$, rezultă că valoarea $z = \sqrt{\frac{\sqrt{1+4a^2}-1}{2}}$ este valoarea maximă și $z = -\sqrt{\frac{\sqrt{1+4a^2}-1}{2}}$ este valoare minimă a funcției z.

9. Sistemul

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 + u^2 = 1 \\ xy^2 + yz^2 + zu^2 = 2 \\ \ln(x^2 + y^2) + e^{x^3+u^3} = 3 \end{cases}$$

definește y, z și u ca funcții de x în $D \in R^3$. Să se calculeze $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{du}{dx}$.

R: Derivăm în raport cu x ecuațiile sistemului ținînd seamă că y, z și u sînt funcții de x.

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} + 3z^2\frac{dz}{dx} + 2u\frac{du}{dx} = 0 \\ y^2 + 2xy\frac{dy}{dx} + z^2\frac{dy}{dx} + 2yz\frac{dz}{dx} + u^3\frac{dz}{dx} + 2zu\frac{du}{dx} = 0 \\ \frac{2x}{x^2+y^2} + \frac{2y}{x^2+y^2}\frac{dy}{dx} + 2ue^{x^3+u^3}\frac{du}{dx} + 2ze^{x^3+u^3}\frac{dz}{dx} = 0 \end{cases}$$

Considerat ca sistem în $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{du}{dx}$, admite o soluție unică în $D^* \subset D$, unde determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3y^2 & 3z^2 & 2u \\ 2xy + z^2 & 2yz + u^2 & 2zu \\ \frac{2y}{x^2+y^2} & 2ze^{x^3+u^3} & 2ue^{x^3+u^3} \end{vmatrix}$$

este diferit de zero, soluția dată de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\Delta}\begin{vmatrix} 3x^2 & 3z^2 & 2u \\ y^2 & 2yz + u^2 & 2zu \\ \frac{2x}{x^2+y^2} & 2ze^{x^3+u^3} & 2ue^{x^3+u^3} \end{vmatrix}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-1}{\Delta}\begin{vmatrix} 3y^2 & 3x^2 & 2u \\ 2xy + z^2 & y^2 & 2zu \\ \frac{2y}{x^2+y^2} & \frac{2x}{x^2+y^2} & 2ue^{x^3+u^3} \end{vmatrix}$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 3y^2 & 3z^2 & 3x^2 \\ 2xy + z^2 & 2yz + u^2 & y^2 \\ \frac{2y}{x^2+y^2} & 2ze^{z^2+u^2} & \frac{2x}{x^2+y^2} \end{vmatrix}$$

10. Să se calculeze $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ dacă $z = z(x, y)$ din sistemul

$$x = \sin u \cos v, \quad y = \sin u \sin v, \quad z = \cos u.$$

R: Aplicăm teorema de existenţă pentru sisteme de funcţii implicite cu

$$F_1(x, y, z, u, v) \equiv x - \sin u \cos v = 0$$

$$F_2(x, y, z, u, v) \equiv y - \sin u \sin v = 0$$

$$F_3(x, y, z, u, v) \equiv z - \cos v = 0$$

F_1, F_2, F_3 sînt continue şi derivabile în R^5. Deoarece x şi y rămîn variabile independente, z, u, v devin funcţii de x şi y.

Punem condiţia ca

$$\frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(z, u, v)} = \begin{vmatrix} 0 & \cos u \cos v & -\sin u \sin v \\ 0 & \cos u \sin v & \sin u \cos v \\ 1 & -\sin u & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= +\sin u \cos u = +\frac{1}{2}\sin 2u \neq 0$$

Deci $2u \neq K\pi$; $u \neq \frac{K\pi}{2}$.

Aceasta înseamnă că $z = z(x, y)$ în toate punctele lui R^3 exceptînd punctele $(0, 0, 1)$, $(0, 0, -1)$ şi $(z = 0,\ x^2 + y^2 = 1)$

Deci:

$$\begin{cases} x - \sin u(x, y) \cos v(x, y) \equiv 0 \\ y - \sin u(x, y) \sin v(x, y) \equiv 0 \\ z(x, y) - \cos v(x, y) \equiv 0 \end{cases}$$

pentru $(x, y) \in R^2 - \{(x, y), x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(0, 0)\}$. Derivînd în raport cu x şi y, obţinem

$$1 - \cos u \cos v \frac{\partial u}{\partial x} + \sin u \sin v \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$-\cos u \sin v \frac{\partial u}{\partial x} + \sin u \cos v \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \sin v \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

De unde eliminînd pe $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ între cele trei ecuații, obținem

$$\begin{vmatrix} 1 & -\cos u \cos v & \sin u \sin v \\ 0 & -\cos u \sin v & -\sin u \cos v \\ \frac{\partial z}{\partial x} & 0 & \sin v \end{vmatrix} = 0$$

sau

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\sin^2 v}{\sin u} = -\frac{|y|^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

La fel:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\sin v \cos v}{\sin u} = -\frac{yz}{x^2+y^2}$$

11. Se dă sistemul

$$F(x+y+z,\quad xy+zu) = 1$$

$$G(x+y+z,\quad xz+y^2+u^2) = 2$$

care definește pe z și u ca funcții de x și y. Se cer $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, du.

R: Presupunem pe $F, G \in C^{(1)}$ în $D \subset R^3$. Să punem

$$x+y+z = \alpha, \qquad zy+zu = \beta, \qquad xz+y^2+u^2 = \gamma.$$

Ținînd seamă că z, u sînt funcții de x și y, obținem, derivînd în raport cu x relațiile din enunț

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha}\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\frac{\partial F}{\partial \beta}\left(y+u\frac{\partial z}{\partial x}+z\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0$$

$$\frac{\partial G}{\partial \alpha}\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\frac{\partial G}{\partial \gamma}\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}+2u\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0$$

sau

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \alpha}+u\frac{\partial F}{\partial \beta}\right)\frac{\partial z}{\partial x}+z\frac{\partial F}{\partial \beta}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial \alpha}+y\frac{\partial F}{\partial \beta}=0$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial \alpha}+x\frac{\partial G}{\partial \gamma}\right)\frac{\partial z}{\partial x}+2u\frac{\partial G}{\partial \gamma}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial \alpha}+z\frac{\partial G}{\partial \gamma}=0$$

și pentru $D^* \subset D$ pentru care

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial \alpha}+u\frac{\partial F}{\partial \beta} & z\frac{\partial F}{\partial \beta} \\ \frac{\partial G}{\partial \alpha}+x\frac{\partial G}{\partial \gamma} & 2u\frac{\partial G}{\partial \gamma} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-1}{\Delta}\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial \alpha} + y\frac{\partial F}{\partial \beta} & z\frac{\partial F}{\partial \beta} \\ \frac{\partial G}{\partial \alpha} + z\frac{\partial G}{\partial \gamma} & 2u\frac{\partial G}{\partial \gamma} \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-1}{\Delta}\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial \alpha} + u\frac{\partial F}{\partial \beta} & \frac{\partial F}{\partial \alpha} + y\frac{\partial F}{\partial \beta} \\ \frac{\partial G}{\partial \alpha} + x\frac{\partial G}{\partial \gamma} & \frac{\partial G}{\partial \alpha} + z\frac{\partial G}{\partial \gamma} \end{vmatrix}$$

Dacă derivăm ecuațiile enunțului în raport cu y, ne dă

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha}\left(1 + \frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{\partial F}{\partial \beta}\left(x + u\frac{\partial z}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial \alpha}\left(1 + \frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{\partial G}{\partial \gamma}\left(x\frac{\partial z}{\partial y} + 2y + 2u\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

determinantul sistemului în necunoscutele $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ este tot $\Delta \neq 0$, deci în D^* obținem

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial \alpha} + x\frac{\partial F}{\partial \beta} & z\frac{\partial F}{\partial \beta} \\ \frac{\partial G}{\partial \alpha} + 2y\frac{\partial G}{\partial \gamma} & 2u\frac{\partial G}{\partial \gamma} \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial \alpha} + u\frac{\partial F}{\partial \beta} & \frac{\partial F}{\partial \alpha} + x\frac{\partial F}{\partial \beta} \\ \frac{\partial G}{\partial \alpha} + x\frac{\partial G}{\partial \gamma} & \frac{\partial G}{\partial \alpha} + 2y\frac{\partial G}{\partial \gamma} \end{vmatrix}$$

$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy$ unde se înlocuiește $\frac{\partial u}{\partial x}$ și $\frac{\partial u}{\partial y}$ cu expresiile găsite mai sus.

12. Funcția $z = f(x, y)$ definită de relațiile

$$z\varphi'(u) = (y - \varphi(u))^2$$

$$(x + u)\varphi'(u) = y - \varphi(u)$$

cu $\varphi \in C^2$ în $D \subset R$ satisface, oricare ar fi u relația

$$\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y} = z$$

R: Relațiile din enunț definesc pe z și u ca funcții de x și y. Derivăm prima relație în raport cu x, apoi în raport cu y; obținem

$$\frac{\partial z}{\partial x}\,\varphi'(u) + z\varphi''(u)\,\frac{\partial u}{\partial x} = -2(y - \varphi(u))\,\varphi'(u)\,\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\,\varphi'(u) + z\varphi''(u)\,\frac{\partial u}{\partial y} = 2(y - \varphi(u))\left(1 - \varphi'(u)\,\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

din care rezultă, eliminînd pe z

$$(1)\quad \begin{cases} \varphi'^2(u)\,\dfrac{\partial z}{\partial x} = -(y-\varphi(u))[2\varphi'^2(u)+(y-\varphi(u))\varphi''(u)]\,\dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \text{şi} \\ \varphi'^2(u)\,\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2(y-\varphi(u)\varphi'(u)-(y-\varphi(u))(2\varphi'^2(u)+(y-\varphi(u))\varphi''(u))\,\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

Derivăm în raport cu x, apoi în raport cu y a doua relaţie din enunţ

$$\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\varphi'(u)+(x+u)\varphi''(u)\,\frac{\partial u}{\partial x} = -\varphi'(u)\,\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\,\varphi'(u)+(x+u)\,\varphi''(u)\,\frac{\partial u}{\partial y} = 1-\varphi'(u)\,\frac{\partial u}{\partial y},$$

care dau

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{\varphi'(u)}{2\varphi'(u)+(x+u)\,\varphi''(u)}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{1}{2\varphi'(u)+(x+u)\,\varphi''(u)} \end{cases}$$

Dacă ţinem seama de (1) şi (2), deducem

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y-\varphi(u), \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y-\varphi(u)}{\varphi'(u)}$$

care conduc imediat la relaţia din enunţ.

13. Să se arate că dacă

$$u = F(x, y, z), \qquad v = G(x, y, z)$$

$$x = f(\xi, \eta), \qquad y = g(\xi, \eta), \qquad z = h(\xi, \eta)$$

cu $F, G \in C^{(1)}$ în $D \subset R^3$ şi $f, g, h \in C^{(1)}$ în $\Delta \subset R^2$, atunci avem

$$\frac{D(u, v)}{D(\xi, \eta)} = \frac{D(u, v)}{D(x, y)}\,\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} + \frac{D(u, v)}{D(y, z)}\,\frac{D(y, z)}{D(\xi, \eta)} + \frac{D(u, v)}{D(z, x)}\,\frac{D(z, x)}{D(\xi, \eta)}$$

R: Avem

$$(1)\quad \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial \eta},$$

şi două relaţii analoge pentru derivatele lui v. Dacă formăm expresia

$$\frac{D(u, v)}{D(\xi, \eta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \xi} & \dfrac{\partial u}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial v}{\partial \xi} & \dfrac{\partial v}{\partial \eta} \end{vmatrix}$$

unde înlocuim pe $\frac{\partial u}{\partial \xi}$, $\frac{\partial v}{\partial \xi}$, ..., cu expresiile lor din (1), obținem **relațiile** din enunț. În general, dacă

$$u = \mathrm{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad v = \mathrm{G}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$x_i = \mathrm{f}_i(\xi, \eta), \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

atunci are loc egalitatea

$$\frac{\mathrm{D}(u, v)}{\mathrm{D}(\xi, \eta)} = \sum_{i \neq j = 1}^{n} \frac{\mathrm{D}(u, v)}{\mathrm{D}(x_i, x_j)} \cdot \frac{\mathrm{D}(x_i, x_j)}{\mathrm{D}(\xi, \eta)}.$$

14. Se dă sistemul

$$\begin{cases} \mathrm{F}(x + y - t,\ x^2 + y^2 - t^2) = x, \\ x^4 + y^4 + t^4 = 1, \end{cases}$$

care definește pe x și y ca funcții de t. Să se găsească $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ cît și condiția ca aceste derivate să fie continue.

R. Presupunem că $\mathrm{F} \in \mathrm{C}^{(1)}$ în $D \subset R^3$. Dacă derivăm în raport cu t ecuațiile sistemului, obținem cu

$$u = x + y - t, \qquad v = x^2 + y^2 - t^2,$$

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - 1\right) + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v}\left(2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - 2t\right) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$4x^3\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 4y^3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 4t^3 = 0$$

sau

$$\left(-1 + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u} + 2x\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u} + 2y\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2t\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}$$

$$x^3\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + y^3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -t^3$$

Pentru $D^* \subset D$ în care determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u} + 2x\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v} - 1 & \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u} + 2y\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v} \\ x^3 & y^3 \end{vmatrix} \neq 0$$

obținem

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 2t\frac{\partial F}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial u} + 2y\frac{\partial F}{\partial v} \\ -t^3 & y^3 \end{vmatrix},$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} + 2x\frac{\partial F}{\partial v} - 1 & 2t\frac{\partial F}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial u} \\ x^3 & -t^3 \end{vmatrix}.$$

Pentru $(x, y, z) \in D^*$ și $F \subset C^{(1)}$ în D deci și în D^* $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ există și sînt continue.

15. Din sistemul

$$\begin{cases} F(x - y + z + u, \quad x^2 + y^2 - z^2 - u) = 1, \\ y \sin x + zu = 2, \end{cases}$$

să se calculeze dz și du.

R: Presupunem că $F \in C^{(1)}$ în $D \subset R^4$. Dacă punem

$$x - y + z + u = \alpha, \qquad x^2 + y^2 - z^2 - u = \beta,$$

și diferențiem apoi ecuațiile sistemului obținem

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha}(dx - dy + dz + du) + \frac{\partial F}{\partial \beta}(2xdx + 2ydy - 2zdz - du) = 0$$

$$\sin x\, dy + y \cos x\, dx + z\, du + u dz = 0$$

sau

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \alpha} + 2x\frac{\partial F}{\partial \beta}\right)dx + \left(2y\frac{\partial F}{\partial \beta} - \frac{\partial F}{\partial \alpha}\right)dy +$$

$$+\left(\frac{\partial F}{\partial \alpha} - 2z\frac{\partial F}{\partial \beta}\right)dz + \left(\frac{\partial F}{\partial \alpha} - \frac{\partial F}{\partial \beta}\right)du = 0$$

$$y \cos x\, dx + \sin x\, dy + u dz + z du = 0$$

și pentru

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial \alpha} - 2z\frac{\partial F}{\partial \beta} & \frac{\partial F}{\partial \alpha} - \frac{\partial F}{\partial \beta} \\ u & z \end{vmatrix} \neq 0$$

obținem

$$dz = \frac{-1}{\Delta}\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial F}{\partial \alpha} + 2x\frac{\partial F}{\partial \beta}\right)dx + \left(2y\frac{\partial F}{\partial \beta} - \frac{\partial F}{\partial \alpha}\right)dy & \frac{\partial F}{\partial \alpha} - \frac{\partial F}{\partial \beta} \\ y \cos x\, dx + \sin x\, dy & z \end{vmatrix}$$

şi

$$du = -\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial \alpha} - 2z\dfrac{\partial F}{\partial \beta} & \left(\dfrac{\partial F}{\partial \alpha} + 2x\dfrac{\partial F}{\partial \beta}\right)dx + \left(2y\dfrac{\partial F}{\partial \beta} - \dfrac{\partial F}{\partial \alpha}\right)dy \\ u & y\cos x\,dx + \sin y\,dy \end{vmatrix}$$

16. Să se determine extremele funcţiei

$$u(x, y, z) = x^p + y^p + z^p, \quad (x, y, z) \in R^3,$$

cu legătura

$$x^{p-1} + y^{p-1} + z^{p-1} = a^{p-1}, \quad a > 0, \quad p \in N, \quad p \geqslant 2$$

R: Formăm funcţia ajutătoare

$$\Phi(x, y, z, \lambda) = x^p + y^p + z^p + \lambda(x^{p-1} + y^{p-1} + z^{p-1} - a^{p-1})$$

şi determinăm punctele staţionare ale funcţiei Φ. Avem

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = px^{p-1} + (p-1)\lambda x^{p-2} = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = py^{p-1} + (p-1)\lambda y^{p-2} = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = pz^{p-1} + (p-1)\lambda z^{p-2} = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = x^{p-1} + y^{p-1} + z^{p-1} - a^{p-1} = 0.$$

Sistemul format din primele trei ecuaţii pentru $p > 2$ admite şi soluţia $x = y = z = 0$ care nu este admisă de legătură, deci mai rămîne numai soluţia

$$x = y = z = -\frac{p-1}{p}\lambda$$

care introdusă în legătură dă

$$(\alpha) \qquad 3(-1)^{p-1}\left(\frac{p-1}{p}\right)^{p-1}\lambda^{p-1} = a^{p-1},$$

deci *pentru p par*, $p \geqslant 2$.
Ecuaţia (α) are o singură rădăcină reală, anume

$$\lambda = -3^{1-p}\frac{p}{p-1}a,$$

de unde

$$x = y = z = 3^{1-p} \cdot a.$$

$$d^2u = p(p-1)[x^{p-2}\,dx^2 + y^{p-2}dy^2 + z^{p-2}\,dz^2]$$

şi avem $d^2u > 0$, dacă $a > 0$, deci în punctul $x = y = z = 3^{1-p}a$, u are un minim de valoare $3 \cdot 3^{(1-p)p}\, a^p$.

Pentru p impar $p \geqslant 3$ avem din (α)

$$\lambda_1 = 3^{1-p}\frac{p}{p-1}a, \quad \lambda_2 = -3^{1-p}\frac{p}{p-1}a,$$

de unde rezultă

$$x_1 = y_1 = z_1 = -3^{1-p}\cdot a.$$
$$x_2 = y_2 = z_2 = 3^{1-p}\cdot a.$$

Pentru prima valoare $d^2u < 0$ şi în acest punct, u are un maxim de valoare $-3.3^{(1-p)p}a^p$; pentru a doua valoare u are un minim $3.3^{(1-p)p}a^p$.

17. Dintr-un fier cornier de lungime $4a$ se construieşte rama unui acvariu paralelipipedic. Să se determine dimensiunile paralelipipedului astfel ca acvariul să aibă volum maxim.

R: Dacă x, y, z sînt lungimile muchiilor paralelipipedului, atunci

$$V = xyz, \quad x + y + z = a,$$

deci avem de studiat extremele funcţiei V cu legătura $x + y + z = a$. Avem

$$\Phi(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(x + y + z - a)$$

şi determinăm punctele staţionare libere ale lui Φ.

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = yz + \lambda = 0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = xz + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = xy + \lambda = 0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial \lambda} = x + y + z - a = 0$$

Obţinem $\lambda x = \lambda y = \lambda z, \quad \lambda \neq 0, \quad x = y = z$

deci

$$x = y = z = \frac{a}{3}, \quad V\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right) = \frac{a^3}{27}.$$

Cercetăm ce avem pentru V în acest punct

$$d^2V = 3(x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy),$$

$$d^2V\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right) = a(dx\,dy + dy\,dz + dz\,dx)$$

Din legătură avem

$$dx + dy + dz = 0$$

deci

$$d^2V\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right) = a[dxdy - (dx + dy)^2] =$$
$$= -a[dx^2 + dy^2 + dxdy] < 0,$$

deci pentru $x = \frac{a}{3}$, $y = \frac{a}{3}$, $z = \frac{a}{3}$, acvariul va avea un volum maxim $V = \frac{1}{27}a^3$.

18. Să se determine aria elipsei de intersecție a cilindrului:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

cu planul $Ax+By+Cz=0$

R: Aria elipsei este $\pi\alpha\beta$ unde α și β sînt semiaxele elipsei. Din definiție α, β sînt valorile maximă respectiv minimă a distanței $u(x, y, z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Problema revine la a determina extremele funcției:

$$F(x, y, z)=x^2+y^2+z^2$$

cu legăturile $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $Ax+By+Cz=0$.

Aplicăm metoda multiplicatorilor lui Lagrange.

Formăm funcția:

$$\Phi(x, y, z, \lambda, \mu)=x^2+y^2+z^2+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)+\mu(Ax+By+Cz)$$

$$(1)\quad \left|\begin{array}{l|l} \frac{\partial\Phi}{\partial x}\equiv 2x+2x\frac{\lambda}{a^2}+\mu A=0 & x \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y}\equiv 2y+2y\frac{\lambda}{b^2}+\mu B=0 & y \\ \frac{\partial\Phi}{\partial z}\equiv 2z+\mu C=0 & z \end{array}\right.$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad Ax+By+Cz=0.$$

$$2(x^2+y^2+z^2)+2\lambda\underbrace{\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}+\mu\underbrace{(Ax+By+Cz)}=0$$

Deci $x^2+y^2+z^2=-\lambda$.

Sistemul (1) are soluțiile:

$$x=-\frac{\mu A}{2\left(1+\frac{\lambda}{a^2}\right)},\quad y=-\frac{\mu B}{2\left(1+\frac{\lambda}{b^2}\right)}$$

$$z=-\frac{\mu C}{2}.$$

Înlocuind în ultima ecuație, obținem:

$$\frac{A^2}{\left(1+\frac{\lambda}{a^2}\right)}+\frac{B^2}{\left(1+\frac{\lambda}{b^2}\right)}+C^2=0$$

de unde rezultă ecuația de gradul 2 în λ:

$$\frac{C^2}{a^2b^2}\lambda^2 + \lambda\left(\frac{A^2+C^2}{b^2} + \frac{B^2+C^2}{a^2}\right) + A^2 + B^2 + C^2 = 0$$

din care

$$\lambda_1\lambda_2 = \frac{A^2+B^2+C^2}{C^2} \cdot a^2b^2$$

și cum

$$\alpha = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\Big|_{max} = \sqrt{-\lambda_1}$$

$$\beta = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\Big|_{min} = \sqrt{-\lambda_2}$$

aria elipsei va fi

$$\pi \frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{C} ab.$$

19. Să se arate că pentru $x_1 \cdot x_2 \dots x_n = 1$,

$$x_i \in R, \quad x_1 + x_2 + \dots + x_n \geqslant n.$$

R: Studiem extremele funcției

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \dots x_n$$

cu legătura $x_1x_2 \dots x_n = 1$.

Formăm funcția

$$\varphi(x_1, \dots, x_n, \lambda) = x_1 + x_2 + \dots + x_n + \lambda(x_1 \dots x_n - 1)$$

Punctele staționare sînt soluția sistemului

$$\begin{cases} 1 + \lambda x_2 \dots x_n = 0 \\ 1 + \lambda x_1 x_3 \dots x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ 1 + \lambda x_1 x_2 \dots x_{n-1} = 0 \\ x_1 x_2 \dots x_n = 1 \end{cases} \tag{1}$$

sau

$$1 + \frac{\lambda}{x_1} = 0, \quad 1 + \frac{\lambda}{x_2} = 0 \dots 1 + \frac{\lambda}{x_n} = 0$$

de unde

$$x_1 = x_2 \dots = x_n = -\lambda.$$

Din relația de condiție obținem

$$(-\lambda)^n = 1$$

sau:

$$\lambda = \pm 1, \quad x_1 = x_2 = \dots = x_n = \mp 1, \quad n = \text{par.}$$

$$\lambda = -1, \quad x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1, \quad n = \text{impar}$$

Calculăm diferențiala de ordinul doi pentru a stabili care dintre aceste puncte staționare sînt puncte de extrem.

Obținem funcțiile

$$\varphi_1(x_1, ..., x_n) = x_1 + ... + x_n - x_1 ... x_n + 1.$$

$$\varphi_2(x_1, ..., x_n) = x_1 + ... + x_n + x_1 ... x_n - 1.$$

$$d^2\varphi_1(+1, ..., +1) = -2[dx_1\,dx_2 + dx_1\,dx_3 ... dx_1\,dx_n +$$

$$+ dx_2\,dx_3 + ... + dx_2\,dx_n + dx_{n-2}\,dx_{n-1} + dx_{n-2}\,dx_n + dx_{n-1}dx_n]$$

din condiția de legătură obținem

$$dx_1 + dx_2 + ... + dx_n = 0$$

Ținînd seama de aceasta în $d^2\varphi_1$ aceasta devine:

$$d^2\varphi_1(+1 ... +1) = -2[dx_1dx_2 + ... + dx_1dx_{n-1} +$$

$$+dx_2\,dx_3 + ... + dx_2\,dx_{n-1} + ... + dx_{n-2}\,dx_{n-1} - (dx_1 + ... + dx_{n-1})^2] =$$

$$= 2[dx_1^2 + ... + dx_{n-1}^2 - dx_1\,dx_2 - ... - dx_1dx_{n-1} ... - dx_{n-2}dx_{n-1}] =$$

$$= dx_1^2 + (dx_1 - dx_2)^2 + (dx_2 - dx_3)^2 + ... + (dx_{n-2} - dx_{n-1})^2 + dx_{n-1}^2 > 0,$$

deci punctul (1, 1, ... 1) este un punct de minim. Cum $f(1, 1, ...,) = n$

$$x_1 + x_2 + ... + x_n \geqslant n.$$

$$d^2\varphi_2(-1, -1, ... -1) = 2(-1)^n[dx_1\,dx_2 + dx_1\,dx_3 + ... + dx_{n-1}dx_n] =$$

$$= 2[dx_1\,dx_2 + ... + dx_{n-1}dx_n] = -d^2\varphi_1(1, 1 ..., 1) < 0$$

Punctul (−1, −1, ... −1) este un punct de maxim dacă n este par.

20. Se dau funcțiile

$$u = f\left(\frac{x-y}{y-z}\right), \quad v = g\left(\frac{y-z}{z-x}\right), \quad w = h\left(\frac{z-x}{x-y}\right), \quad \text{cu } f,g,h \in C^{(1)}$$

în $D \subset R^3$. Să se arate că sînt în dependență funcțională. Să se găsească legătura dintre ele.

R: Trebuie să arătăm că

(1)
$$\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$$

este nul în D. Dacă notăm

$$\alpha = \frac{x-y}{y-z}, \quad \beta = \frac{y-z}{z-x}, \quad \gamma = \frac{z-x}{x-y}$$

obținem

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\mathrm{df}}{\mathrm{d}\alpha} \cdot \frac{1}{y-z}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\mathrm{df}}{\mathrm{d}\alpha} \cdot \frac{z-x}{(y-z)^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\mathrm{df}}{\mathrm{d}\alpha} \cdot \frac{x-y}{(y-z)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\mathrm{dg}}{\mathrm{d}\beta} \cdot \frac{y-z}{(z-x)^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\mathrm{dg}}{\mathrm{d}\beta} \cdot \frac{1}{z-x}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\mathrm{dg}}{\mathrm{d}\beta} \cdot \frac{x-y}{(z-x)^2},$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\mathrm{dh}}{\mathrm{d}\gamma} \cdot \frac{y-z}{(x-y)^2}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\mathrm{dh}}{\mathrm{d}\gamma} \cdot \frac{z-x}{(x-y)^2}, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\mathrm{dh}}{\mathrm{d}\gamma} \cdot \frac{1}{x-y},$$

pe care îi introducem în (1). Obținem

$$\frac{\mathrm{D}(u, v, w)}{\mathrm{D}(x, y, z)} = \mathrm{f}'(\alpha)\,\mathrm{g}'(\beta)\,\mathrm{h}'(\gamma)\,\frac{\Delta}{(y-z)^2(z-x)^2(x-y)^2}$$

unde Δ este determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} y-z & z-x & x-y \\ y-z & z-x & x-y \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix}$$

care este evident identic nul. În $D' \subset D$ unde f, g, h sînt strict monotone avem

$$\frac{x-y}{y-z} = \mathrm{f}^{-1}(u), \quad \frac{y-z}{z-x} = \mathrm{g}^{-1}(v), \quad \frac{z-x}{x-y} = \mathrm{h}^{-1}(w),$$

deci

$$\mathrm{f}^{-1}(u) \cdot \mathrm{g}^{-1}(v) \cdot \mathrm{h}^{-1}(w) = 1$$

care este o legătură între u, v, w.

21. Funcțiile

$$u = \frac{a_1x + a_2y + a_3z}{m_1x + m_2y + m_3z}, \quad v = \frac{b_1x + b_2y + b_3z}{n_1x + n_2y + n_3z}, \quad w = \frac{c_1x + c_2y + c_3z}{p_1x + p_2y + p_3z},$$

sînt în dependență funcțională pe orice domeniu $D \subset R^3$ care nu întîlnește planele

$$m_1x + m_2y + m_3z = 0, \quad n_1x + n_2y + n_3z = 0, \quad p_1x + p_2y + p_3z = 0$$

Să se generalizeze.

R: Observăm că u, v, w sînt funcții omogene de grad zero. Determinantul funcțional

$$\frac{\mathrm{D}(u, v, w)}{\mathrm{D}(x, y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$$

este nul în orice domeniu $D \subset R^3$ în care funcțiile u, v, w sînt definite deoarece dacă înmulțim coloana întîia cu x, pe a doua cu y și pe a treia cu z, apoi le adunăm pe toate la întîia, obținem zero, în virtutea relației lui Euler relativă la funcțiile omogene de grad zero, anume

$$x\frac{\partial \Phi}{\partial x} + y\frac{\partial \Phi}{\partial y} + z\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$$

unde Φ este u, v sau w. Combinațiile de pe prima coloană se pot scrie

$$(m_1u - a_1)\,x + (m_2u - a_2)\,y + (m_3u - a_3)\,z = 0,$$
$$(n_1v - b_1)\,x + (n_2v - b_2)\,y + (n_3v - b_3)\,z = 0,$$
$$(p_1w - c_1)\,x + (p_2w - c_2)\,y + (p_3w - c_3)\,z = 0,$$

în care dacă punem condiția să admită soluții nu toate nule în x, y, z, obținem legătura

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} m_1u - a_1 & m_2u - a_2 & m_3u - a_3 \\ n_1v - b_1 & n_2v - b_2 & n_3v - b_3 \\ p_1w - c_1 & p_2w - c_2 & p_3w - c_3 \end{vmatrix} = 0$$

care este legătura între u, v, w.

Generalizare. Funcțiile

$$u = \mathrm{f}\left(\frac{a_1x + a_2y + a_3z}{m_1x + m_2y + m_3z}\right),$$

$$v = \mathrm{g}\left(\frac{b_1x + b_2y + b_3z}{n_1x + n_2y + n_3z}\right),$$

$$w = \mathrm{h}\left(\frac{c_1x + c_2y + c_3z}{p_1x + p_2y + p_3z}\right)$$

cu $\mathrm{f}, \mathrm{g}, \mathrm{h} \in C^{(1)}$ în $\Delta \subset R$, $(x, y, z) \in D \subset R^3$, sînt în dependență funcțională. În $\Delta' \subset \Delta$, unde f, g, h sînt inversibile, legătura între u, v, w este dată tot de determinantul (1) în care se înlocuiesc u cu $\mathrm{f}^{-1}(u)$, v cu $\mathrm{g}^{-1}(v)$ și w cu $\mathrm{h}^{-1}(w)$.

22. Să se determine α astfel ca funcțiile:

$$u = \mathrm{f}(\alpha x + 2y - z), \quad v = \mathrm{g}(-x - y + 2z)$$

$w = \mathrm{h}(x + 3y - 2z)$ (unde f, g, h sînt funcții derivabile în raport cu argumentul lor într-un domeniu $V \subset R^3$) să fie în dependență funcțională în V. Să se găsească legătura între ele.

R: Calculăm $\dfrac{\mathrm{D}(u, v, w)}{\mathrm{D}(x, y, z)} = \mathrm{f}'\mathrm{g}'\mathrm{h}' \begin{vmatrix} \alpha & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$

Pentru ca $\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} \equiv 0$ pentru $(x, y, z) \in V$ trebuie ca

$$\begin{vmatrix} \alpha & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0, \text{ de unde } \alpha = \frac{5}{4}$$

Pentru $\alpha = \frac{5}{4}$ trecînd la funcțiile inverse obținem:

$$\begin{cases} \frac{5}{4}x + 2y - z = f^{-1}(u) \\ -x - y + 2z = g^{-1}(v) \\ x + 3y - 2z = h^{-1}(w) \end{cases}$$

de unde, deoarece $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$ pentru ca sistemul să fie compatibil trebuie ca determinantul:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & f^{-1}(u) \\ -1 & +2 & g^{-1}(v) \\ 3 & -2 & h^{-1}(w) \end{vmatrix} = 0.$$

23. Să se arate că determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & y & z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u & v & w \\ u & v & w & x & y & z \\ -v & u & 0 & y & -x & 0 \\ 0 & -w & v & 0 & z & -y \\ w & 0 & -u & -z & 0 & x \end{vmatrix}$$

este nul pentru orice $(x, y, z, u, v, w) \in R^6$.

R: Să considerăm funcțiile

$$\alpha = x^2 + y^2 + z^2 \qquad \beta = u^2 + v^2 + w^2$$

$$\gamma = ux + vy + wz, \qquad \alpha_1 = uy - vz, \qquad \beta_1 = vz - wy,$$

$$\gamma_1 = wx - zu,$$

definite în R^6. Ele sînt legate prin relația

$$(x^2 + y^2 + z^2)(u^2 + v^2 + z^2) = (ux + vy + wz)^2 + (uy - vz)^2 +$$

$$+ (vz - wx)^2 + (wx - zu)^2$$

numită identitatea lui Lagrange, pentru orice $(x, y, z, u, v, w) \in R^6$, deci sînt independenta funcțională pe R^6 și determinantul lor funcțional, care este determinantul Δ, este nul pe R^6.

24. Să se determine extremele funcției:

$$\Delta(x_1, ..., z_n) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \dots z_1 \\ x_2 & y_2 \dots z_2 \\ \dots & \dots \\ x_n & y_n \dots z_n \end{vmatrix},$$

cînd se pun condițiile:

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1^2 + y_1^2 + \dots + z_1^2 = 1, \\ x_2^2 + y_2^2 + \dots + z_2^2 = 2, \\ \dots \\ x_n^2 + y_n^2 + \dots + z_n^2 = n. \end{cases}$$

R: Rezolvăm la început o problemă mai simplă. Fixăm în determinantul Δ toate coordonatele cu valorile extremului în afara punctelor de pe linia k. În acest caz vom privi determinantul Δ ca funcție de n variabile $(x_k, y_k, ..., z_k)$. Dezvoltînd după linia k scriem

$$\Delta = x_k X_k + y_k Y_k + \dots + z_k Z_k$$

(unde $X_k, ..., Z_k$ sînt complementii algebrici ai elementelor de pe linia k și sînt constante). Vom studia extremele funcției

$$\Delta = x_k X_k + y_k Y_k + \dots + z_k Z_k$$

cu legătura

$$x_k^2 + y_k^2 + \dots + z_k^2 = k.$$

Folosim metoda multiplicatorilor lui Lagrange

Fie

$$\psi(x_k, ..., z_k, \lambda) = x_k X_k + \dots + z_k Z_k + \lambda(x_k^2 + y_k^2 + \dots + z_k^2 - k).$$

Punctele staționare se găsesc printre soluțiile sistemului:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_k} = X_k + 2\lambda x_k = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y_k} = Y_k + 2\lambda y_k = 0, \ ..., \frac{\partial \psi}{\partial z_k} = Z_k + 2\lambda z_k = 0.$$

Găsim coordonatele punctelor de extremi:

$$x_k = -\frac{X_k}{2\lambda}, \quad y_k = -\frac{Y_k}{2\lambda}, \ ..., z_k = -\frac{Z_k}{2\lambda}.$$

Factorul constant λ se obține din condiția de legătură:

$$\lambda_1 = \left[\frac{X_k^2 + Y_k^2 + \dots + Z_k^2}{4k}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad \lambda_2 = -\left[\frac{X_k^2 + Y_k^2 + \dots + Z_k^2}{4k}\right]^{\frac{1}{2}}$$

(eliminînd cazul cînd X_k, Y_k, ..., Z_k sînt toţi nuli). Obţinem astfel punctele staţionare:

$$M_1\left(-\frac{X_k}{2\lambda_1}, \quad -\frac{Y_k}{2\lambda_1}, \ldots, -\frac{Z_k}{2\lambda_1}\right),$$

$$M_2\left(-\frac{X_k}{2\lambda_2}, \quad -\frac{Y_k}{2\lambda_2}, \ldots, -\frac{Z_k}{2\lambda_2}\right).$$

Calculăm **diferenţiala de ordinul doi**, $d^2\psi$ ale funcţiei Lagrange în punctele M_1 şi M_2 obţinem:

$$d^2\psi = 2\lambda[(dx_k)^2 + (dy_k)^2 + \ldots + (dz_k)^2],$$

$d^2\psi(\lambda_1) > 0$ deci M_1 este punct de minim; $d^2\psi(\lambda_2) < 0$ deci M_2 este punct de maxim. Observăm că în punctele staţionare sînt valabile egalităţile:

$$\frac{x_k}{X_k} = \frac{y_k}{Y_k} = \ldots = \frac{z_k}{Z_k}.$$

Să ne ocupăm de problema iniţială. Pentru $i \neq k$, putem scrie relaţiile:

$$x_iX_i + y_iY_i + \ldots + z_iZ_i = 0, \quad i \neq k.$$

Ţinînd seama de proporţionalitatea între x_k, y_k, ..., z_k şi X_k, Y_k, ..., Z_k obţinem:

$$x_ix_k + y_iy_k + \ldots + z_iz_k = 0, \quad i \neq k. \tag{2}$$

Ridicînd la pătrat determinantul Δ şi ţinînd seama de relaţiile (1) şi (2) obţinem un determinant în care toate elementele sînt zero în afara celor de pe diagonala principală. Avem

$$\Delta = 1, 2 \ldots n = n!$$

Deci, valorile de extrem sînt:

$$\Delta_{max} = \sqrt{n!} \text{ şi } \Delta_{min} = -\sqrt{n!}$$

Obţinem astfel

$$|\Delta| \leqslant \sqrt{1, 2 \ldots n}$$

sau

$$|\Delta| \leqslant [(x_1^2 + \ldots + z_1^2)(x_2^2 + \ldots + z_2^2) \ldots (x_n^2 + \ldots + z_n^2)]^{\frac{1}{2}}$$

Inegalitatea obţinută se **numeşte inegalitatea lui Hadamard.**

O b s e r v a ţ i e: Pentru $n = 3$, inegalitatea are următoarea interpretare geometrică: volumul paralelipipedului construit pe segmentele OA_1, OA_2, OA_3 cu $A_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3$, (paralelipiped cu muchiile de lungime dată) este maxim pentru paralelipipedul dreptunghic.

CAPITOLUL VII

TRANSFORMĂRI PUNCTUALE. SCHIMBĂRI DE VARIABILE

1. Ce devine ecuația

$$(e^x + 1)\, y'' = y$$

prin transformarea $u = e^x$, $v = y$, $v = v(u)$, $v \in C^{(2)}$ în $I \subset R$?

R: Diferențiind relațiile de transformare, obținem:

$$du = e^x\, dx,\ dv = dy$$

$$\frac{dv}{du} = e^{-x}\frac{dy}{dx} \to \frac{dy}{dx} = e^x\frac{dv}{du},\quad \frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{du}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = u\frac{d}{du}\left(u\frac{dv}{du}\right) = u\left(\frac{dv}{du} + u\frac{d^2v}{du^2}\right)$$

Cu aceasta, ecuația devine

$$u^2(u+1)\,v'' + u(u+1)\,v' = v$$

2. Să se transforme ecuația

$$y'^2y^{IV} - 10\,y'y''y''' + 15\,y''^3 = 0$$

alegînd pe y ca nouă variabilă independentă.

R: Știm că:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{x'(y)},\quad x'(y) \neq 0$$

de aici

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x'(y)}\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{x'(y)}\right)\frac{dy}{dx} = -\frac{x''}{x'^3}$$

și

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{x'}\frac{d}{dy}\left(-\frac{x''}{x'^3}\right) = -\frac{1}{x'}\left(\frac{x'''}{x'^3} - \frac{3x''^2}{x'^4}\right) = \frac{3x''^2}{x'^5} - \frac{x'''}{x'^4}$$

cît şi

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{1}{x'} \frac{d}{dy} \left(\frac{3x''^2}{x'^5} - \frac{x'''}{x'^4} \right) = \frac{1}{x'} \left(\frac{10x''x'''}{x'^5} - \frac{15\,x''^3}{x'^6} - \frac{x^{IV}}{x'^4} \right).$$

Înlocuind în ecuaţia dată se obţine:

$$\frac{d^4x}{dy^4} = 0$$

3. Ce devine relaţia

$$4x^2y'' + 4xy' - (4x^2 + 1)\, y = 4\sqrt{x^3}\, e^x, \quad x > 0,$$

cînd se face schimbarea de funcţie $u = \sqrt{x} \cdot y$?

R: Avem $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, y(x) + \sqrt{x}\, \frac{dy}{dx}$,

de unde:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{du}{dx} - \frac{1}{2x}\, y(x); \quad xy' = \sqrt{x}u' - \frac{u}{2\sqrt{x}}$$

dacă derivăm această relaţie, obţinem:

$$xy'' + y' = \sqrt{x}u'' + \frac{1}{4} \frac{u}{x\sqrt{x}}$$

sau

$$x^2y'' + xy' = x\sqrt{x}u'' + \frac{u}{4\sqrt{x}}$$

Ecuaţia devine $u'' - u = e^x$

4. În ecuaţia $F(x^2y'', xy', y) = 0$, unde F este o funcţie omogenă de variabilele sale, se face schimbarea de funcţie $u(x) = x\frac{y'}{y}$, $y \neq 0$. Ce devine ecuaţia?

R: Avem: $xy' = uy$

$$u' = \frac{y'}{y} + x\, \frac{y''}{y} - \frac{xy'^2}{y^2}$$

de unde

$$x^2y'' = y(xu' - u - u^2),$$

dacă înlocuim în ecuaţia din enunţ, obţinem

$$F\,[y(xu' - u - u^2),\, uy,\, y] = 0$$

şi, cum F este o funcţie omogenă, se reduce la

$$F\,[xu' - u - u^2,\, u,\, l] = 0$$

5. Să se calculeze $E = \frac{y''(x)}{1 + y'^2(x)}$ dacă se face schimbarea $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $r = r(\theta)$.

R: Avem

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(r'\sin\theta + r\cos\theta)}{(r'\cos\theta - r\sin\theta)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{r'\sin\theta + r\cos\theta}{r'\cos\theta) - r\sin\theta}\right)\cdot\frac{d\theta}{dx};$$

dar,

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{1}{r'\cos\theta - r\sin\theta}$$

deci

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(r''\sin\theta + 2r'\cos\theta - r\sin\theta)(r'\cos\theta - r\sin\theta) -}{(r'\cos\theta - r\sin\theta)^3}$$

$$\frac{-(r''\cos\theta - 2r'\sin\theta - r\cos\theta)(r'\sin\theta + r\cos\theta)}{(r'\cos\theta - r\sin\theta)^3};$$

$$y'' = \frac{-rr'' + 2r'^2 + r^2}{(r'\cos\theta - r\sin\theta)^3}$$

Înlocuind, obținem:

$$E = \frac{(r'\cos\theta - r\sin\theta)(r^2 - rr'' + 2r'^2)}{r'^2 + r^2}$$

6. În ce se transformă ecuația:

$$\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

dacă se face transformarea $x = u^2 - v^2$, $y = u^2 + v^2$, $(u, v)\in D \subset R^2$?

R: Avem

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

însă

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 2u, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -2v, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = 2u, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = 2v$$

deci

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 2u\frac{\partial z}{\partial x} + 2u\frac{\partial z}{\partial y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = -2v\frac{\partial z}{\partial x} + 2v\frac{\partial z}{\partial y},$$

în $D^* \subset D$ pentru care

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2u & 2u \\ -2v & 2v \end{vmatrix} = +8uv \neq 0,$$

rezultă

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{8uv} \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & 2u \\ \frac{\partial z}{\partial v} & 2v \end{vmatrix} = \frac{1}{4uv}\left(v\frac{\partial z}{\partial u} - u\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{8uv} \begin{vmatrix} 2u & \frac{\partial z}{\partial u} \\ -2v & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{1}{4uv}\left(u\frac{\partial z}{\partial v} + v\frac{\partial z}{\partial u}\right)$$

pe care le înlocuim în ecuația din enunț

$$v\frac{\partial z}{\partial u} - u\frac{\partial z}{\partial v} + (u^2 - v^2)\left(u\frac{\partial z}{\partial v} + v\frac{\partial z}{\partial u}\right) = 0$$

7. Să se calculeze pentru $z(x, y) \in C^{(2)}$ în $D \subset R^2$ derivata de ordinul doi $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ în funcție de $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}$, ... dacă se face schimbarea de variabile

$$x = u\,e^v, \quad y = v\,e^u.$$

R: Avem

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v},$$

deci

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}e^v + \frac{\partial z}{\partial y}v\,e^u,$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}ue^v + \frac{\partial z}{\partial y}e^u.$$

Dacă

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^v & v\,e^u \\ ue^v & e^u \end{vmatrix} = e^{u+v}(1 - uv) \neq 0$$

atunci

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^{-v}}{1 - uv}\left(\frac{\partial z}{\partial u} - v\frac{\partial z}{\partial v}\right), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{e^{-u}}{1 - uv}\left(\frac{\partial z}{\partial v} - u\frac{\partial z}{\partial u}\right)$$

Am obținut astfel operatorul

$$\frac{\partial \cdot}{\partial x} = \frac{e^{-v}}{1-uv}\left(\frac{\partial \cdot}{\partial u} - v\frac{\partial \cdot}{\partial v}\right)$$

care ne permite să calculăm derivata de ordinul doi, anume

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{e^{-v}}{1-uv}\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{e^{-v}}{1-uv}\left(\frac{\partial z}{\partial u} - v\frac{\partial z}{\partial v}\right)\right] -$$

$$-\frac{v\,e^{-v}}{1-uv}\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{e^{-v}}{1-uv}\left(\frac{\partial z}{\partial u} - v\frac{\partial z}{\partial v}\right)\right]$$

sau

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{e^{-2v}}{(1-uv)^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{v^2 e^{-2v}}{(1-uv)^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - \frac{2v\,e^{-2v}}{(1-uv)^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + A\frac{\partial z}{\partial u} + B\frac{\partial z}{\partial v}$$

unde

$$A = \frac{v^2 e^{-2v}}{(1-uv)^3} - \frac{v\,e^{-v}}{1-uv}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{e^{-v}}{1-uv}\right),$$

$$B = \frac{-v^2 e^{-2v}}{(1-uv)^3} + \frac{v\,e^{-v}}{1-uv}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{v\,e^{-v}}{1-uv}\right).$$

8. Fie $z = f(x, y)$, $(x, y)\in D \subset R^2$, $f\in C^{(2)}$ în D. Să se calculeze $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ cu ajutorul derivatelor $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$, $\ldots$, în urma schimbării de variabile

$$x = \frac{u}{v}, \quad y = \ln uv, \quad uv > 0.$$

R: Avem

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

și

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{v}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{u}{v^2}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{u}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{v}$$

deci

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{v}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{u}\frac{\partial z}{\partial y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{u}{v^2}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{v}\frac{\partial z}{y},$$

de unde obținem pentru $uv > 0$, deoarece determinantul sistemului este

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{v} & \frac{1}{u} \\ -\frac{u}{v^2} & \frac{1}{v} \end{vmatrix} = \frac{2}{v^2} \neq 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}\left[v\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{v^2}{u}\frac{\partial z}{\partial v}\right], \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}\left[v\frac{\partial z}{\partial v} + u\frac{\partial z}{\partial u}\right].$$

Am obținut operatorul

$$\frac{\partial \cdot}{\partial x} = \frac{v}{2}\frac{\partial \cdot}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{v^2}{u}\frac{\partial \cdot}{\partial v}$$

care, aplicat lui $\frac{\partial z}{\partial y}$ ne dă pe $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$. Avem deci:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{v}{4}\frac{\partial}{\partial u}\left(v\frac{\partial z}{\partial v} + u\frac{\partial z}{\partial u}\right) - \frac{1}{4}\frac{v^2}{u}\frac{\partial}{\partial v}\left(v\frac{\partial z}{\partial u} + u\frac{\partial z}{\partial v}\right) =$$

$$= \frac{v^2}{4}\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{v}{4}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{uv}{4}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{1}{4}\frac{v^2}{u}\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{v^3}{4u}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - \frac{1}{4}v^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

Deci

$$4\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = uv\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - v^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{v^2}{u}(u - v)\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + v\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{v^2}{u}\frac{\partial z}{\partial u}$$

9. Să se calculeze $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ dacă $x = \cos\varphi\cos\psi$, $y = \cos\varphi\sin\psi$, $z = \sin\varphi$; $\varphi = \varphi(x, y)$, $\psi = \psi(x, y)$.

R: Derivînd în raport cu x obținem:

$$\begin{cases} 1 = -\sin\varphi\cos\psi\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \cos\varphi\sin\psi\,\frac{\partial\psi}{\partial x}, \\ 0 = -\sin\varphi\sin\psi\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \cos\varphi\cos\psi\,\frac{\partial\psi}{\partial x}, \\ \frac{\partial z}{\partial x} = \cos\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} \end{cases}$$

de unde rezultă

$$\begin{vmatrix} -\sin\varphi\cos\psi & -\cos\varphi\sin\psi & 1 \\ -\sin\varphi\sin\psi & \cos\varphi\cos\psi & 0 \\ \cos\varphi & 0 & \frac{\partial z}{\partial x} \end{vmatrix} = 0$$

adică

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\cos\varphi\cos\psi}{\sin\varphi};$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\cos\varphi\cos\psi}{-\sin\varphi\cos\varphi} = -\frac{\cos\psi}{\sin\varphi}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{-\sin\varphi\sin\psi}{-\sin\varphi\cos\varphi} = \frac{\sin\psi}{\cos\varphi}$$

de aici urmează

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\sin\varphi\cos\psi}{\sin\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\cos\varphi\sin\psi}{\sin\varphi}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\cos^2\varphi\cos\psi}{\sin^2\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x} =$$

$$= -\frac{\sin\varphi\cos^2\psi}{\sin^2\varphi} + \frac{\sin^2\psi}{\sin\varphi} - \frac{\cos^2\varphi\cos^2\psi}{\sin^3\varphi} = -\frac{\cos^2\psi}{\sin^3\varphi} + \frac{\sin^2\psi}{\sin\varphi}, \quad \sin\varphi \neq 0$$

10. Ce devine derivata parțială $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ prin transformarea $x = w$, $y = u + w$, $z = v$ cu $w = w(u, v)$, $w \in C^{(2)}$.

R: Diferențiind în relațiile date, obținem:.

$$dx = \frac{\partial w}{\partial u}du + \frac{\partial w}{\partial v}dv,$$

$$dy = du + \frac{\partial w}{\partial u}du + \frac{\partial w}{\partial v}dv,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = dv,$$

prin înlocuire, rezultă

$$dv = \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial u}du + \frac{\partial w}{\partial v}dv\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(du + \frac{\partial w}{\partial u}du + \frac{\partial w}{\partial v}dv\right)$$

deci

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial w}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\left(1 + \dfrac{\partial w}{\partial u}\right) = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial w}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial w}{\partial v} = 1, \end{cases}$$

de unde:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1 + \dfrac{\partial w}{\partial u}}{\dfrac{\partial w}{\partial v}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial w}{\partial u}}{\dfrac{\partial w}{\partial v}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1 + \dfrac{\partial w}{\partial u}}{\dfrac{\partial w}{\partial v}}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1 + \dfrac{\partial w}{\partial u}}{\dfrac{\partial w}{\partial v}}\right)\frac{\partial v}{\partial x}$$

$\frac{\partial u}{\partial x}$ și $\frac{\partial v}{\partial x}$ le calculăm aplicînd teorema funcțiilor implicite sistemului:

$$x = w; \quad y = u + w; \quad z = v$$

se vede că $y = u + x$ implică $u = y - x$ și $v = z$, deci:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -1; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1+\frac{\partial w}{\partial u}}{\frac{\partial w}{\partial v}}\right) + \frac{1+\frac{\partial w}{\partial u}}{\frac{\partial w}{\partial v}} \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1+\frac{\partial w}{\partial u}}{\frac{\partial w}{\partial v}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\frac{\partial w}{\partial v}}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + 2\left(1+\frac{\partial w}{\partial u}\right)\frac{\frac{\partial^2 w}{\partial v \partial u}}{\frac{\partial w}{\partial v}} - \frac{\left(1+\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}}{\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2}\right]$$

11. Să se transforme ecuația:

$$(x - z)\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

luînd pe x ca funcție necunoscută iar pe y și z ca variabile independente.

R: Putem scrie

$$x = x[y, z(x, y)];$$

derivăm în această relație în raport cu x și apoi cu y

$$1 = \frac{\partial x}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x},$$

$$0 = \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y},$$

de unde:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial z}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial x}{\partial y}}{\frac{\partial x}{\partial z}}$$

și, înlocuind în ecuație, aceasta devine,

$$(x - z) = y\frac{\partial x}{\partial y}.$$

12. Ce devine expresia $E = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} + z$ dacă se face transformarea:

$$u = x + z, \quad v = y + z, \quad w = x + y, \quad w = w(u, v), \quad (u, v) \in D \subset R^2,$$
$$w \in C^{(2)} \text{ în } D.$$

R: Diferențiind relațiile de legătură obținem:

$$du = dx + dz, \quad dv = dy + dz, \quad dw = dx + dy \tag{1}$$

deoarece $z = z(x, y)$ și $w = w(u, v)$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy, \quad dw = \frac{\partial w}{\partial u} du + \frac{\partial w}{\partial v} dv.$$

înlocuind în (1) obținem

$$\frac{\partial w}{\partial u}\left[dx + \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right] + \frac{\partial w}{\partial v}\left[dy + \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right] = dx + dy$$

Egalînd cu zero, coeficienții dx și dy

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 1 \\ \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 1. \end{cases}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1 - \frac{\partial w}{\partial u}}{\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1 - \frac{\partial w}{\partial v}}{\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}}$$

Pentru derivata de ordinul doi,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1 - \frac{\partial w}{\partial u}}{\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}}\right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1 - \frac{\partial w}{\partial u}}{\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}}\right) \frac{\partial v}{\partial x}$$

dar:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 + \frac{\partial z}{\partial x} = 1 + \frac{1 - \frac{\partial w}{\partial u}}{\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}} = \frac{1 + \frac{\partial w}{\partial v}}{\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1 - \frac{\partial w}{\partial u}}{\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}}$$

cu aceasta avem

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1+\frac{\partial w}{\partial v}}{\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}} \cdot \frac{-\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right)-\left(1-\frac{\partial w}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}\right)}{\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2} +$$

$$+\frac{1-\frac{\partial w}{\partial u}}{\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}} \cdot \frac{-\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right)-\left(1-\frac{\partial w}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right)}{\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2} =$$

$$= -\frac{\left(1+\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2}{\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right)^3}\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{2\left(\frac{\partial w}{\partial u}-1\right)\left(\frac{\partial w}{\partial v}+1\right)}{\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right)^3}\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} - \frac{\left(1-\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2}{\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right)^3}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}$$

Înlocuind în E, obținem

$$E = \frac{-1}{\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right)^3}\left[\left(1+\frac{\partial w}{\partial v}\right)\frac{\partial_\circ}{\partial u}+\left(1-\frac{\partial w}{\partial u}\right)\frac{\partial_\circ}{\partial v}\right]^{(2)}(w) +$$

$$+\frac{1-\frac{\partial w}{\partial u}}{\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}}+\frac{u+v-w}{2}$$

13. Să se găsească **transformata** ecuației

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

în coordonate polare.

R: Avem $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, deci

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

sau

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta; \quad \frac{\partial u}{\partial \theta}=-\frac{\partial u}{\partial x}\rho\sin\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\rho\cos\theta,$$

de unde obținem cu $\rho \neq 0$

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\cos\theta\dfrac{\partial u}{\partial \rho}-\dfrac{\sin\theta}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \theta}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\cos\theta}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \theta}+\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial \rho}; \end{cases}$$

pentru derivatele de ordinul doi folosim operatorii introduşi de (1)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\cos\theta \frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) - \frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta \frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) =$$

$$= \cos^2\theta \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} - 2\frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\theta} + 2\frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}$$

şi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\theta} + \sin\theta\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \sin\theta\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\theta} + \sin\theta\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) =$$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + 2\frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho} - 2\frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}$$

Ţinînd seamă de aceste rezultate ecuaţia se transformă în

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho} = 0$$

Ecuaţia din enunţ se numeşte ecuaţia lui Laplace în plan şi se întîlneşte în teoria cîmpurilor.

14. Să se arate că transformarea:

$$u = \begin{cases} y, & y\in[0,1) \\ y^2, & y\in[1,2] \end{cases}, \quad v = \begin{cases} x^2, & x\in[1,2) \\ 2^x, & x\in[2,4] \end{cases}$$

nu este regulată pe mulţimea $[1,4]\times[0,2]$ dar este biunivocă pe această mulţime.

R: Derivatele parţiale de ordinul întîi ale funcţiilor u şi v nu sînt continue

Astfel:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \begin{cases} 1, & y\in(0,1) \\ 2y, & y\in(1,2), \end{cases} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \begin{cases} 2x, & x\in(1,2) \\ 2^x \ln 2, & x\in(2,4) \end{cases}$$

$\frac{\partial u}{\partial y}$ nu este continuă în $y = 1$ iar $\frac{\partial v}{\partial x}$ în $x = 2$.

Transformarea este însă biunivocă deoarece

$$(x_1^2\, y_1) = (x_2^2, y_2) \to x_1 = x_2; \quad y_1 = y_2$$

$$2^{x_1} = 2^{x_2} \to x_1 = x_2 \quad \text{şi} \quad y_1^2 = y_2^2 \to y_1 = y_2, \quad y\in[1,2]$$

15. Se dau transformările

$$(T_1), \quad u = x + y, \quad v = y + z, \quad w = z + x,$$

$$(T_2) \quad \xi = u^2 + v^2, \quad \eta = v^2 + w^2, \quad \xi = w^2 + u^2,$$

definite în R^3. Să se găsească transformarea compusă $T_2(T_1)$ și să se verifice relația

$$\frac{D(\xi, \eta, \zeta)}{D(x, y, z)}\Big|_{M_0} = \frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)}\Big|_{M_0} \cdot \frac{D(\xi, \eta, \zeta)}{D(u, v, w)}\Big|_{M_1}$$

unde $M_0(1, 1, 1)$ iar M_1 este $T_1(M_0)$

R: Avem $T_2(T_1)$ dat de

$$\xi = (x + y)^2 + (y + z)^2;$$

$$\eta = (y + t)^2 + (z + x)^2;$$

$$\zeta = (z + x)^2 + (x + y)^2,$$

și

$$\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$\frac{D(\xi, \eta, \zeta)}{D(u, v, w)} = \begin{vmatrix} 2u & 2v & 0 \\ 0 & 2v & 2w \\ 2u & 0 & 2w \end{vmatrix} = 16\, uvw$$

Dacă considerăm transformarea compusă obținem

$$\frac{D(\xi, \eta, \zeta)}{D(x, y, z)} = \begin{vmatrix} 2(x + y) & 2(y + z) + 2(x + y) & 2(y + z) \\ 2(z + x) & 2(y + z) & 2(y + z) + 2(z + x) \\ 2(x + z) + (x + y) & 2(x + y) & 2(x + z) \end{vmatrix}$$

$$= 32\,(x + y)(y + z)(z + x)$$

Avem și

$$(1, 1, 1) \to (2, 2, 2) \to (8, 8, 8) \text{ deci}$$

$$\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)}\Big|_{M_0} = 2, \quad \frac{D(\xi, \eta, \zeta)}{D(u, v, w)}\Big|_{M_1} = 16.2^3 = 128$$

$$\frac{D(\xi, \eta, \zeta)}{D(x, y, z)}\Big|_{M_0} = 32.2.2.2. = 256 = 2.128.$$

Transformarea T_2 este regulată în $R^3 - A$ unde A este mulțimea punctelor situate în planele de coordonate.

Transformarea compusă $T_2(T_1)$ este regulată în R^3 cu excepția punctelor situate în planele $x + y = 0$, $y + z = 0$ și $z + x = 0$.

16. Se dă

$$z = x^3 + y^3, \quad (x, y) \in D \subset R^2$$

şi transformarea

$$u = x^2 + y^2, \; v = y^2 + z^2, \quad w = xyz, \quad (x, y, z) \in R^3$$

şi se cere să se calculeze $\frac{\partial w}{\partial u}$, $\frac{\partial w}{\partial v}$ în funcţie de x, y, z.

R: Avem:

$$\mathrm{d}w = \frac{\partial w}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial w}{\partial v}\,\mathrm{d}v \tag{1}$$

şi

$$\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y, \quad \mathrm{d}v = 2y\,\mathrm{d}y + 2z\,\mathrm{d}z,$$
$$\mathrm{d}w = yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z,$$

însă

$$\mathrm{d}z = 3x^2\,\mathrm{d}x + 3y^2\,\mathrm{d}y$$

deci

$$\mathrm{d}v = 6x^2z\,\mathrm{d}x + (2y + 6y^2z)\,\mathrm{d}y$$
$$\mathrm{d}w = (yz + 3x^3y)\,\mathrm{d}x + (xz + 3xy^3)\,\mathrm{d}y$$

pe care le înlocuim în (1). Obţinem

$$(yz + 3x^3y)\,\mathrm{d}x + (xz + 3xy^3)\,\mathrm{d}y =$$
$$= \frac{\partial w}{\partial u}(2x\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y) + \frac{\partial w}{\partial v}(6x^2z\,\mathrm{d}x + (2y + 6y^2z)\,\mathrm{d}y)$$

care conduce la sistemul

$$\begin{cases} 2x\dfrac{\partial w}{\partial u} + 6x^2z\dfrac{\partial w}{\partial v} = yz + 3x^3y \\ 2y\dfrac{\partial w}{\partial u} + (2y + 6y^2z)\dfrac{\partial w}{\partial v} = xz + 3xy^3 \end{cases} \tag{2}$$

Pentru

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2x & 6x^2z \\ 2y & 2y + 6y^2z \end{vmatrix} \neq 0$$

obţinem

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} yz + 3x^2y & 6x^2z \\ xz + 3xy^2 & 2y + 6y^2z \end{vmatrix},$$
$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 2x & yz + 3x^3y \\ 2y & xz + 3xy^3 \end{vmatrix}$$

17. Se dau transformările

$$(T_1) \qquad u_1 = x + y, \quad u_2 = y + z, \quad u_3 = z + x, \quad D \subset R^3$$

$$(T_2) \qquad v_1 = u_2 u_3, \quad v_2 = u_3 u_1, \quad v_3 = u_1^2 + u_2^2, \quad D^* \subset R^3$$

Se cere să se determine domeniile maxime D şi D^* în care transformările T_1 şi T_2 sînt proprii. Să se determine transformarea compusă $T_2(T_1)$ şi să se verifice relaţia

$$\frac{D(u_1, u_2, u_3)}{D(x, y, z)} \cdot \frac{D(v_1, v_2, v_3)}{D(u_1, u_2, u_3)} = \frac{D(v_1, v_2, v_3)}{D(x, y, z)}$$

R: Avem

$$\frac{D(u_1, u_2, u_3)}{D(x, y, z)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

deci $D = R^3$; avem şi

$$\frac{D(v_1, v_2, v_3)}{D(u_1, u_2, u_3)} = \begin{vmatrix} 0 & u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & u_1 \\ 2u_1 & 2u_2 & 0 \end{vmatrix} = 2u_3(u_1^2 + u_2^2)$$

deci $D^* = R - A$ unde A este mulţimea punctelor pentru care $u_3 = 0$ (plan) sau $u_1 = u_2 = 0$ (dreapta).

Transformarea compusă $T_2(T_1)$ este dată de

$$v_1 = (y + z)(z + x),$$

$$v_2 = (z + x)(x + y),$$

$$v_3 = (x + y)^2 + (y + z)^2$$

deci

$$\frac{D(v_1, v_2, v_3)}{D(x, y, z)} = \begin{vmatrix} y + z & z + x & 2z + x + y \\ 2x + y + z & z + x & x + y \\ 2(x + y) & 2(2y + x + z) & 2(y + z) \end{vmatrix} =$$

$$= 4(z + x)((y + z)^2 + (x + y)^2).$$

Dacă ţinem seamă de valorile lui u_1, u_2, u_3, obţinem

$$\frac{D(v_1, v_2, v_3)}{D(x, y, z)} = 4u_3(u_1^2 + u_2^2) = 4(z + x)[(y + z)^2 + (x + y)^2]$$

adică acelaşi rezultat.

18. Se dă transformarea proprie

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v).$$

$u, v \in D \subset R^2$. Să se demonstreze că

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \cdot \frac{D(u, v)}{D(x, y)} = 1$$

R: Dacă transformarea este proprie în D, atunci $\varphi, \psi \in C^{(1)}$ şi $\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \neq 0$ în D. Trebuie să calculăm pe

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Din ecuaţiile din enunţ avem, considerînd pe u, v ca funcţii de x şi y, şi derivînd în raport cu x

$$1 = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$0 = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x},$$

care dau

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ 0 & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial v}}{\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}}$$

şi

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & 1 \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & 0 \end{vmatrix} = \frac{-\frac{\partial \psi}{\partial u}}{\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}}$$

Dacă derivăm în raport cu y rezultă

$$0 = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$1 = \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$$

deci

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ 1 & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}}$$

și

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & 1 \end{vmatrix} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}}$$

Cu aceste derivate avem

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \frac{1}{\left(\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}\right)^2} \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial v} & -\frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ -\frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial u} \end{vmatrix}$$

de unde rezultă imediat

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \frac{1}{\frac{D(u, v)}{D(x, y)}}.$$

CAPITOLUL VIII

INTEGRALA RIEMANN, STIELTJES, LEBESGUE

1. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum\limits_{k=0}^{n} \ln C_n^k$ asociindu-i o integrală Riemann.

R: $S_n = \frac{1}{n^2} \sum\limits_{k=0}^{n} \ln C_n^k = \frac{1}{n^2} \sum\limits_{k=0}^{n-1} (n - 2k - 1)\ln(n - k) =$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} [1 - (2k + 1)/n] \ln \left(1 - \frac{k}{n}\right)$$

Aceasta este însă o sumă Riemann pentru integrala

$$\int_0^1 (2x - 1) \ln x \, dx = 1/2.$$

Obţinem astfel $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1/2$.

2. Dacă f este continuă pe $[0, \pi]$ şi dacă

$$\int_0^\pi f(t) \cos t \, dt = \int_0^\pi f(t) \sin t \, dt = 0,$$

atunci există, punctele α şi β astfel ca:

$$0 < \alpha < \beta < \pi \text{ şi } f(\alpha) = f(\beta) = 0.$$

R: Deoarece pentru $0 < \alpha < \pi$, $\sin \alpha > 0$ din teorema de medie

$$\int_0^\pi f(t) \sin t \, dt = 0 = \pi f(\alpha) \sin \alpha$$

urmează că există cel puţin un $0 < \alpha < \pi$ astfel ca $f(\alpha) = 0$.

Să presupunem că α este singurul zero al lui f între 0 şi π. Atunci $f(t)$ trebuie să schimbe de semn la trecerea prin α. Deci $f(t) \sin (t - \alpha)$ este de semn constant şi atunci

$$\int_0^\pi f(t) \sin (t - \alpha) \, dt \neq 0,$$

ceea ce contrazice ipoteza.

3. Să se arate că pentru $\alpha > -1$

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(1-\alpha)\ldots(n-1-\alpha)}{n!\,(2n+1)} = 2^{2\alpha}\,\frac{\Gamma^2(1+\alpha)}{\Gamma(2+2\alpha)}$$

R: Fie integrala

$$I_\alpha = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (1-y^2)^\alpha\,dy$$

pe care o calculăm în 2 moduri: dezvoltînd seria binomială $(1-y^2)^\alpha$ şi apoi prin schimbarea de variabilă $1-y=2x$

Obţinem

$$I_\alpha = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-y^2)^\alpha\,dy = \int_0^1 (1-y^2)^\alpha\,dy =$$

$$= \int_0^1 \left[1 + \frac{\Sigma\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}(-y^2)^n\right]dy =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\,\alpha(1-\alpha)\ldots(n-1-\alpha)}{n!\,(2n+1)}$$

4. Să se arate că funcţia

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - E\left(\frac{1}{x}\right), & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

este integrabilă pe $[0,1]$.

R: Punem pe $f(x)$ sub altă formă.

Pentru aceasta scriem

$$E\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} 0, & 0 < \frac{1}{x} < 1, \quad x > 1 \\ 1, & 1 \leqslant \frac{1}{x} < 2, \quad \frac{1}{2} < x \leqslant 1 \\ 2, & 2 \leqslant \frac{1}{x} < 3, \quad \frac{1}{3} < x \leqslant \frac{1}{2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ n, & n \leqslant \frac{1}{x} < n+1, \quad \frac{1}{n+1} < x \leqslant \frac{1}{n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

de unde obţinem pentru $f(x)$ forma

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - 1, & \frac{1}{2} < x \leqslant 1 \\ \frac{1}{x} - 2, & \frac{1}{3} < x \leqslant \frac{1}{2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{1}{x} - n, & \frac{1}{n+1} < x \leqslant \frac{1}{n} \end{cases}$$

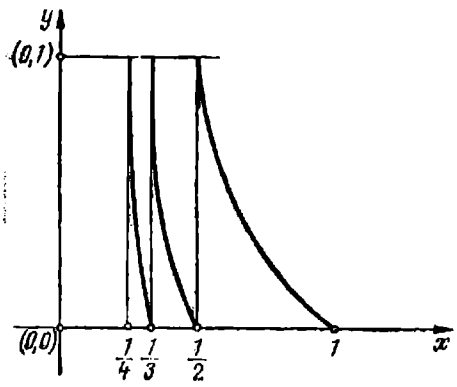

Fig. 15

Graficul funcției $f(x)$ este dat în figura 15.

Fie

$$d: 0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_k < x_{k+1} < \ldots < x_n = 1$$

o diviziune oarecare a intervalului $[0, 1]$.

Pentru a demonstra că funcția este integrabilă, trebuie să arătăm că diferența

$$S_d(f) - s_d(f) = \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)(x_{k+1} - x_k)$$

poate fi făcută mai mică decît $\varepsilon > 0$ arbitrar.

Se pot petrece 2 situații:

a) $\frac{1}{n+1} < x_k < \frac{1}{n}$, $\frac{1}{n+1} < x_{k+1} < \frac{1}{n}$

b) $\frac{1}{n+1} < x_k < \frac{1}{n}$, $\frac{1}{n} < x_{k+1} < \frac{1}{n-1}$

În cazul a)

$$M_k - m_k = f(x_k) - f(x_{k+1}) = \frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_{k+1}} =$$

$$= \frac{x_{k+1} - x_k}{x_k x_{k+1}} < \frac{\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)(n+1)^2}{1} = \frac{n+1}{n}$$

În cazul b) $M_k - m_k = 1$;

Înlocuind aceste rezultate în diferența de mai sus și ținînd seama că în cazul a)

$$x_{k+1} - x_k < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} < \frac{2}{(n-1)(n+1)}$$

iar în cazul b)

$$x_{k+1} - x_k < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} = \frac{2}{(n-1)(n+1)}$$

obținem:

$$S_d(f) - s_d(f) \leqslant \frac{2}{(n-1)(n+1)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n+1}{n} = \frac{2n}{(n-1)n} \to 0 \text{ cînd } n \to \infty$$

ceea ce demonstrează integrabilitatea funcției $f(x)$.

5. Aplicînd formula de medie pentru integrala Riemann, să se arate că

$$\frac{\pi}{6} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2 - x^3}} < \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$$

şi

$$\frac{1}{2} \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^{2n}}} \leqslant \frac{\pi}{6}.$$

R: Pentru prima integrală putem scrie

$$\frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} < \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - x^3}} < \frac{1}{\sqrt{4 - 2x^2}}$$

Integrînd în inegalitatea de mai sus, obţinem:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2 - x^3}} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - 2x^2}}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - 2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}}\Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{4},$$

de unde rezultă relaţia din enunţ.

Pentru integrala a doua, aplicăm formula mediei

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^{2n}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^{2n}}} \cdot \frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{2}$$

unde $0 < \xi < \frac{1}{2}$

Pe de altă parte, integrala se mai poate scrie

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2} \cdot \sqrt{1 + x^2 + \ldots + x^{2n-2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2 + \ldots + \xi^{2n-2}}} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} <$$

$$< \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

cu $0 < \xi' < \frac{1}{2}$.

6. Din calculul integralei $\int_0^1 (1 - x^2)^n \, dx$ să se deducă egalitatea $\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{C_n^k}{2k+1}$ în două moduri.

R: Calculăm integrala dezvoltînd funcţia de sub integrală după regula binomului lui Newton.

Obţinem

$$\int_0^1 (1-x^2)^n \, dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-x^2)^k \, dx = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \int_0^1 x^{2k} \, dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{C_n^k}{2k+1}.$$

Facem schimbarea de variabilă $x = \cos t$; rezultă integrala

$$I_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t \, dt$$

pe care o calculăm prin părţi

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$$

de unde

$$I_n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

Obţinem astfel relaţia

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{C_n^k}{2k+1}$$

7. Să se calculeze

$$I = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x + \cos^2 x}.$$

R: Deoarece

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$$

avem

$$I = \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 - \sin^2 x \cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 - \sin^2 x \cos^2 x} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{1 - \sin^2 x \cos^2 x}$$

Să facem schimbarea de variabilă $\operatorname{tg} x = t$,

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2},$$

deci

$$I = \int_0^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{t^2}{(1+t^2)^2}} \frac{dt}{1+t^2} + \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1 - \frac{t^2}{(1+t^2)^2}} \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1+t^2}{1+t^2+t^4} \, dt + \int_{-\infty}^{0} \frac{1+t^2}{1+t^2+t^4} \, dt$$

dacă înlocuim pe t cu $-t$ în integrala a doua obținem

$$I = 2\int_0^{\infty} \frac{1+t^2}{1+t^2+t^4}\,dt$$

Avem

$$1 + t^2 + t^4 = (1 + t + t^2)(1 - t + t^2)$$

$$\frac{1+t^2}{(1+t+t^2)(1-t+t^2)} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+t+t^2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-t+t^2}$$

deci

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t+t^2} + \int_0^{\infty} \frac{dt}{1-t+t^2} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}}\Big|_0^{\infty} + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t-1}{\sqrt{3}}\Big|_0^{\infty} = 2\,\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

8. Se consideră integrala

$$I_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x)\,dx$$

a) Să se calculeze I_0 și I_1. Să se stabilească o relație de recurență pentru calculul lui I_n.

b) Să se arate că șirul I_n este descrescător și are limita 0.

R: Integrăm prin părți

$$I_n = -\frac{x^n \cos \pi x}{\pi}\Big|_0^1 + \frac{n}{\pi}\int_0^1 x^{n-1}\cos(\pi x)\,dx = \frac{1}{\pi} + \frac{n}{\pi}\left[\frac{x^{n-1}}{\pi}\sin \pi x\Big|_0^1 - \right.$$

$$\left. - \frac{(n-1)}{\pi}\int_0^1 x^{n-2}\sin(\pi x)\,dx\right] = \frac{1}{\pi} - \frac{n(n-1)}{\pi^2} I_{n-2}$$

Relația de recurență este

$$I_n = \frac{1}{\pi} - \frac{n(n-1)}{\pi^2} I_{n-2}$$

Pentru n par putem scrie

$$I_{2p} = \frac{1}{\pi} - \frac{2p(2p-1)}{\pi^2} I_{2p-2}$$

$$I_{2p-2} = \frac{1}{\pi} - \frac{(2p-2)(2p-3)}{\pi^2} I_{2p-4}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$I_4 = \frac{1}{\pi} - \frac{4\cdot 3}{\pi^2} I_2$$

$$I_2 = \frac{1}{\pi} - \frac{2\cdot 1}{\pi^2} I_0$$

Amplificind aceste relaţii respectiv cu 1,

$$\frac{-2p(2p-1)}{\pi^2}, \quad \frac{2p(2p-1)(2p-2)(2p-3)}{\pi^4}, \ldots, (-1)^p \frac{(2p)\ldots 4\cdot 3}{\pi^{2p-2}}$$

ne dă

$$I_{2p} = \frac{1}{\pi}\left[1 - \frac{2p(2p-1)}{\pi^2} + \frac{2p(2p-1)\ldots(2p-3)}{\pi^4} \cdots + \right.$$

$$\left. + \frac{(-1)^p (2p)(2p-1)\ldots 4\cdot 3}{\pi^{2p-2}}\right] + (-1)^{p+1} \frac{(2p)!}{\pi^{2p}} I_0.$$

Dar $I_0 = \int_0^1 \sin \pi x \, dx = \frac{2}{\pi}$

Pentru $n = 2p + 1$ obţinem

$$I_{2p+1} = \frac{1}{\pi} - \frac{(2p+1)\,2p}{\pi^2} I_{2p-1}$$

$$I_{2p-1} = \frac{1}{\pi} - \frac{(2p-1)(2p-2)}{\pi^2} I_{2p-3}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$I_3 = \frac{1}{\pi} - \frac{3\cdot 2}{\pi^2} I_1.$$

Folosind un procedeu asemănător celui de mai sus, obţinem

$$I_{2p+1} = \frac{1}{\pi}\left[1 - \frac{(2p+1)\,2p}{\pi^2} + \frac{(2p+1)(2p)(2p-1)(2p-2)}{\pi^4} - \right.$$

$$\left. + \ldots (-1)^p \frac{(2p+1)!}{3\cdot 2\pi^{2p-2}}\right] + (-1)^{p+1} \frac{(2p+1!}{\pi^{2p}} I_1$$

unde $I_1 = \int_0^1 x \sin \pi x \, dx = \frac{1}{\pi}$

b) Se observă că pentru $0 \leqslant x \leqslant 1$.

$$I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} \sin \pi x \, dx < \int_0^1 x^n \sin \pi x \, dx = I_n$$

Pentru $x = 0,\ 1$ şirul $I_n \to 0$, pentru $0 < x < 1$

$$0 < x^n \sin(\pi x) < x^n$$

deci

$$0 < I_n < \int_0^1 x^n \, dx = \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} I_n = 0$$

9. Fie f o funcție integrabilă pe $[a, b]$. Să notăm

$$r(n) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) - \int_a^b f(t)\,dt$$

Să se arate că:

$$0 \leqslant r(n) \leqslant \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a))$$

Ce valoare trebuie să ia n pentru ca, înlocuind integrala $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$ cu suma $\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$, să obținem valoarea integralei cu două zecimale exacte.

R: Fie $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$; putem scrie

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt$$

deci

$$r(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x_{k+1}) - f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x_{k+1}) - f(x_k))\,dt$$

deoarece $f(t) \geqslant f(x_k)$ pentru $x_k \leqslant t \leqslant x_{k+1}$.

Dezvoltînd obținem

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_{k+1}) - f(x_k))\,dt = (f(x_1) - f(x_0))(x_1 - x_0) + (f(x_2) - f(x_1)(x_2 - x_1) +$$

$$+ \ldots + (f(x_n) - f(x_{n-1}))(x_n - x_{n-1}) = -f(a)(x_1 - a) +$$

$$+ f(x_1)(2x_1 - a - x_2) + \ldots + f(x_p)(2x_p - x_{p-1} - x_{p+1}) + \ldots + f(b)(b - x_{n-1}) =$$

$$= -f(a)(x_1 - a) + f(b)(b - x_{n-1}) = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a))$$

Aplicație:

$$r(n) \leqslant \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) = \frac{e-1}{n} \leqslant \frac{2}{n} \leqslant \frac{1}{100}$$

deci $n \geqslant 200$; se ia $n = 200$.

10. Dacă $g(x)$ este o funcție monotonă pe $[a, b]$, și $f(x)$ este o funcție integrabilă atunci există $\xi \in (a, b)$ astfel ca:

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\,dx + g(b)\int_{\xi}^{b} f(x)\,dx$$

R: Să presupunem că $g(x)$ este necorespunzătoare şi nenegativă pe $[a, b]$. Deoarece $f(x)\,g(x)$ este integrabilă pe $[a, b]$, putem scrie pentru diviziunea

$$\delta: a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu_i g(x_{i-1})\,(x_i - x_{i-1})$$

oricare ar fi numerele $m_i \leqslant \mu_i \leqslant M_i$ unde

$$M_i = \sup_{x\in(x_{i-1},\,x_i)} f(x), \quad m_i = \inf_{x\in(x_{i-1},\,x_i)} f(x)$$

Aplicînd formula de medie funcţiei $f(x)$ pe fiecare din intervalele $[x_{i-1}, x_i]$, alegem pe μ_i astfel ca

$$\mu_i(x_i - x_{i-1}) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx$$

deci:

$$S_\delta = \sum_{i=1}^{n} \mu_i g(x_{i-1})\,(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx$$

Să notăm $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

cu aceasta S_δ se scrie:

$$S_\delta = \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})\,[F(x_i) - F(x_{i-1})]$$

$$g(a)\,(F(x_1) - F(a)) + g(x_1)\,(F(x_2) - F(x_1)) + g(x_2)\,(F(x_3) - F(x_2)) +$$

$$+ \ldots + g(x_{n-1})\,(F(b) - F(x_{n-1})) \leqslant F(x_1)\,(g(a) - g(x_1)) + F(x_2)\,(g(x_1) -$$

$$- g(x_2)) + \ldots + F(x_{n-1})\,(g(x_{n-2}) - g(x_{n-1})) + g(x_{n-1})\,F(b) \leqslant Mg(a),$$

deoarece $F(a) = 0$ şi

$$g(a) \geqslant g(x_1) \geqslant g(x_2) \geqslant \ldots \geqslant g(x_{n-1}) \geqslant g(b)$$

unde

$$M = \sup_{x\in[a,\,b]} F(x).$$

La fel se arată că

$$S_\delta \geqslant mg(a), \quad m = \inf_{x\in[a,b]} F(x)$$

Deoarece $F(x)$ este o funcţie continuă, aceasta ia toate valorile între m şi M, deci $(\forall)\ m \leqslant A \leqslant M$ există ξ astfel ca $F(\xi) = A$ şi cum:

$$mg(a) \leqslant \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leqslant Mg(a)$$

luînd

$$A = \frac{\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx}{g(a)}$$

obținem:

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = g(a)\, F(\xi) = g(a) \int_a^\xi f(x)\, dx$$

Dacă $g(x)$ ia și valori negative atunci $h(x) = g(x) - g(b)$ este necrescătoare și ia valori pozitive.

Aplicînd rezultatul obținut,

$$\int_a^b f(x)\, h(x)\, dx = h(a) \int_a^\xi f(x)\, dx$$

sau

$$\int_a^b f(x)\, (g(x) - g(b))\, dx = (g(a) - g(b)) \int_a^\xi f(x)\, dx$$

de unde

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = g(a) \int_a^\xi f(x)\, dx + g(b) \left(\int_a^b f(x)\, dx - \int_a^\xi f(x)\, dx \right)$$

adică formula de medie cerută.

11. Polinomul lui Legendre $P_n(x)$ este definit de formula:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n], \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Să se demonstreze că:

$$\int_{-1}^1 P_m(x)\, P_n(x)\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq 0 \\ \dfrac{2}{2n+1}, & m = n \end{cases}$$

R: Notăm $v = \frac{1}{2^n \cdot n!} (x^2 - 1)^n$ și $u = \frac{1}{2^m \cdot m!} [(x^2 - 1)^m]^{(m)}$

și aplicăm formula de integrare prin părți:

$$\int_{-1}^1 u v^{(n)}\, dx = [u \cdot v^{(n-1)} - u' \cdot v^{(n-2)} + \ldots + (-1)^{n-1} u^{(n-1)} v]_{-1}^1 + (-1)^n \int_{-1}^1 u^{(n)} v\, dx$$

Observăm că $x = 1$ și $x = -1$ anulează pe $u, u', \ldots, u^{(n-1)}$ și pe $v, v', \ldots, v^{(m-1)}$, deci termenii din paranteză sînt nuli în -1 și $+1$.

Rămîne să calculăm

$$(-1)^n \int_{-1}^1 u^{(n)} v\, dx = (-1)^n \frac{1}{2^{n+m} n!\, m!} \int_{-1}^1 [(x^2 - 1)^m]^{n+m} (x^2 - 1)^n\, dx$$

Observăm că $[(x^2-1)^m]^{(m)}$ este un polinom de gradul m deci dacă $n>m$ şi derivăm încă de n ori obţinem zero; la fel pentru $n<m$, dacă plecăm de la integrala asemănătoare cu factorii permutaţi între ei. Singurul caz în care integrala este nenulă, este $n=m$.

În acest caz obţinem

$$\int_{-1}^{1} uv^{(n)}\,dx = \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\,I_n$$

unde

$$I_n = \int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\,dx = x(x^2-1)^n\Big|_{-1}^{1} - 2n\int_{-1}^{1} x^2(x^2-1)^{n-1}\,dx$$

$$I_n = -2n\,I_n - 2n\,I_{n-1}$$

$$I_n(2n+1) = -2n\,I_{n-1};\quad I_n = -\frac{2n}{2n+1}\,I_{n-1}$$

$$I_{n-1} = -\frac{2n-2}{2n-1}\,I_{n-2},\ \ldots,\ I_1 = -\frac{2}{3}\,I_0,$$

deci

$$I_n = (-1)^n\frac{(2n)!!2}{(2n+1)!!};$$

rezultă

$$\int_{-1}^{1} uv^{(n)}\,dx = \frac{(2n)!\cdot(2n)!!\,2}{2^{2n}\cdot(n!)^2(2n+1)!!} = \frac{2^{2n}(n!)^2\,2}{(2n+1)\,2^{2n}(n!)^2} = \frac{2}{2n+1};$$

12. Fie f integrabilă pe $[0,1]$ cu $f(x)\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$. Să se arate că

$$\frac{\exp\int_0^1 \ln f(x)\,dx}{\int_0^1 f(x)\,dx} \leqslant \frac{\exp\int_0^1 \ln(1-f(x))\,dx}{\int_0^1 (1-f(x))\,dx}$$

R: Inegalitatea se scrie sub forma:

$$\ln\frac{\int_0^1 (1-f(x))\,dx}{\int_0^1 f(x)\,dx} \leqslant \int_0^1 \ln\frac{1-f(x)}{f(x)}\,dx$$

Deoarece funcţia $\varphi(u)=\ln\frac{(1-u)}{u}$ este convexă pentru $u\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ inegalitatea de mai sus este o consecinţă a unei inegalităţi cunoscute a lui Jensen.

13. Să se arate că pentru $0<\alpha<\beta<\pi$

$$\int_0^{\alpha}\sqrt{\frac{\cos\theta-\cos\beta}{\cos\theta-\cos\alpha}}\,d\theta+\int_{\beta}^{\pi}\sqrt{\frac{\cos\beta-\cos\theta}{\cos\alpha-\cos\theta}}\,d\theta=\pi$$

R: Dacă punem: $x=\cos\theta$, $a=\cos\alpha$, $b=\cos\beta$, $-1<b<a<1$ rezultatul de mai sus devine:

$$\int_{-1}^{b}\sqrt{\frac{b-x}{a-x}}\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\int_{a}^{1}\sqrt{\frac{x-b}{x-a}}\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\pi$$

Deoarece cînd $b=a$, relaţia se păstrează va fi suficient să arătăm că derivata ei se anulează, adică

$$\int_{-1}^{b}\frac{dx}{\sqrt{(a-x)(b-x)(1-x^2)}}-\int_{a}^{1}\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)(1-x^2)}}=0$$

Aplicăm transformarea: $y=\dfrac{\lambda x+1}{x+\lambda}$ şi alegem λ astfel ca $(a+b)\lambda^2+2(ab+1)\lambda+(a+b)=0$, $|\lambda|>1$; deoarece realizantul ecuaţiei este $(1-a^2)(1-b^2)>0$, λ este real.

Fie

$$k=\frac{\lambda a+1}{a+\lambda}=-\frac{\lambda b+1}{b+\lambda}$$

atunci $0<k<1$ şi intervalele $[-1, b]$, $[a, 1]$ trec în $[-1, -k]$, $[k, 1]$ respectiv.

Prima integrală devine:

$$\sqrt{\frac{\lambda^2-1}{(\lambda+a)(\lambda+b)}}\int_{-1}^{-k}\frac{dy}{\sqrt{(y^2-k^2)(1-y^2)}}$$

iar a doua este aceeaşi cu excepţia limitelor care sînt de la k la 1.

14. Fie g o funcţie nenegativă şi integrabilă pe $[0, 1]$ şi $A_r=\int_0^1(g(x))^r\,dx$, $r\geqslant 0$ întreg. Să se arate că $A_r\geqslant A_1^r$.

R: Deoarece $g\geqslant 0$, $g^k(x)\leqslant g^k(y)$ dacă şi numai dacă $g(x)\leqslant g(y)$. De aceea, dacă S este pătratul $[0, 1]\times[0, 1]$,

$$0\leqslant\iint_S[g^k(x)-g^k(y)][g(x)-g(y)]\,dx\,dy=$$

$$=2\iint_S g^k(x)\,g(x)\,dx\,dy-2\iint_S g^k(x)\,g(y)\,dx\,dy=2A_{k+1}-2A_kA_1$$

însă $A_1^k\leqslant A_k$ implică $A_1^{k+1}\leqslant A_kA_1\leqslant A_{k+1}$.

15. Dacă $f(x) = \int_0^x \cos \frac{1}{t}\, dt$, să se arate că $f'(0) = 0$.

R: Deoarece $f(0) = 0$, $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$

Dar

$$f(x) = -x^2 \sin \frac{1}{x} + \int_0^x 2t \sin \frac{1}{t}\, dt$$

cum

$$|f(x)| \leqslant 2x^2, \quad \left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant 2|x|,$$

cînd $x \to 0$ obţinem $f'(0) = 0$.

16. Să considerăm clasa funcţiilor f derivabile pe $[0, 1)$ astfel ca: $f(0) = 0$, $f(x) \to \infty$, cînd $x \to 1$, $x_0 < 1$. Fie:

$$K(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{(1 + f^2(x))^3}}, \quad |K(x)| \leqslant 1, \quad x \in [0, 1)$$

Să se arate că pentru orice funcţie din această clasă

$$\int_0^1 \sqrt{1 + f^2(x)}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

R: Putem scrie

$$\int_0^1 K(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(x)}{[1 + f^2(x)]^{1/2}}\Big|_{x=0}^{x=1-\varepsilon} = \lim_{t\to\infty} \frac{f(x)}{\sqrt{1 + f^2(x)}} = 1$$

Din faptul că $|K| \leqslant 1$ pe $[0, 1)$ rezultă că $K \equiv 1$ aproape peste tot pe $[0, 1)$ deci

$$\int_0^1 \sqrt{1 + f^2(x)}\, dx = \int_0^1 \frac{f'(x)dx}{K(1 + f^2(x))}$$

are aceeaşi valoare cu:

$$\int_0^1 \frac{f'(x)\, dx}{1 + f^2(x)} = \operatorname{arctg} f(x)\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{2}$$

17. Dacă $f(s) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x) \cos sx\, dx$, să se determine $\sum_1^\infty f(n)$.

R: Să considerăm dezvoltarea în serie Mac-Laurin a lui e^z cu $z = x + iy$,

$$e^{\cos x + i \sin x} = \sum_{n=0}^{\infty} (\cos nx + i \sin nx)/n!$$

Amplificăm cu $\cos sx$ şi integrăm de la $-\pi$, la π

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos x + i \sin x} \cos sx\, dx = \pi/s!, \quad s = 1, 2, \ldots,$$

Luînd partea reală a integralei, obținem:

$$f(s) = \pi |s|$$

deci:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \pi(e - 1)$$

18. Fie șirul de funcții definit astfel:

$$l^{(1)}(x) = -\int_0^x \frac{\lg(1-t)}{t}\, dt, \quad |x| < 1.$$

$$l^{(n)}(x) = \int_0^x \frac{l^{(n-1)}(t)}{t}\, dt.$$

Să se arate că pentru $|x| < \frac{\pi}{2}$

$$\operatorname{tg} x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n} [l^{(2n-1)}(1) - l^{(2n-1)}(-1)]\, x^{2n-1}$$

R: Să considerăm produsul infinit:

$$\cos \frac{\pi}{2} v = \prod_{k=1}^{\infty} \left[1 - \frac{v^2}{(2k-1)^2}\right]$$

logaritmînd și apoi derivînd în raport cu v obținem

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} v = \frac{4v}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{v^2}{(2k-1)^2}} = \frac{4v}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v^{2n-2}}{(2k-1)^{2n}}, \quad |v| < 1$$

din $l^{(1)}(x)$ obținem:

$$l^{(1)}(x) = \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \ldots, \; |x| \leqslant 1$$

și din $l^{(n)}(x)$,

$$l^{(n)}(x) = \frac{x}{1^{n+1}} + \frac{x^2}{2^{n+1}} + \frac{x^3}{3^{n+1}} + \cdots$$

astfel că:

$$l^{(2n-1)}(1) - l^{(2n-1)}(-1) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^{2n}}$$

19. Să se calculeze valoarea integralei $\int_0^1 x^x \, dx$ cu 3 zecimale exacte.

R: Scriem integrala sub forma

$$\int_0^1 x^x \, dx = \int_0^1 e^{x \ln x} \, dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x \ln x)^k}{k!} \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_0^1 (x \ln x)^k \, dx$$

Am integrat termen cu termen seria de funcţii, deoarece ea este uniform convergentă în [0, 1].

Integrala o calculăm cu o formulă de recurenţă.

Dacă notăm $I_{k,n} = \int_0^1 x^k \ln^n x \, dx = -\frac{n}{k+1} I_{k,n-1}$, de unde dînd diferite valori lui n obţinem

$$I_{k,n} = (-1)^n \frac{n!}{(k+1)^n} I_{k,0}$$

sau încă

$$I_{k,n} = (-1)^n \frac{n!}{(k+1)^{n+1}}$$

Făcînd $k = n$ obţinem:

$$\int_0^1 x^x \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(k+1)^{k+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k^k}$$

seria numerică obţinută este o serie alternată şi deci eroarea pe care o facem dacă luăm în calculul sumei primii n termeni este inferioară lui $|u_{n+1}|$.

Să punem condiţia ca

$$|u_{n+1}| < \frac{1}{10^3};$$

obţinem

$$\frac{1}{(n+1)^{n+1}} < \frac{1}{10^3}, \quad (n+1)^{n+1} < 10^3,$$

condiţie ce este verificată pentru $n = 4$.

Deci,

$$I = \int_0^1 x^x \, dx \sim 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} = 0{,}779$$

20. Să se calculeze cu 3 zecimale exacte valoarea $\frac{I}{\pi}$, unde

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - 0{,}3 \sin^2 x}}.$$

R: Folosim integrarea prin dezvoltare în serie

$$(1 - 0{,}3 \sin^2 x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{0{,}3}{2} \sin^2 x + \ldots + \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} 0{,}3^n \sin^{2n} x + \ldots$$

Seria de funcţii obţinută este o serie uniform convergentă pentru $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ deoarece

$$\left| \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} 0{,}3^n \sin^{2n} x \right| < \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} 0{,}3^n$$

şi seria numerică de termen general $\frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} 0{,}3^n$ este convergentă în baza criteriului raportului.

Integrînd termen cu termen seria de funcţii obţinem

$$I = \frac{\pi}{2} + \frac{0{,}3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx + \ldots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} (0{,}3)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \, dx + \ldots$$

Pentru calculul integralei

$$S_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \, dx,$$

stabilim o formulă de recurenţă:
scriem

$$S_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} x(1 - \cos^2 x) \, dx = S_{2n-2} + \frac{1}{2n-1} S_{2n}$$

sau:

$$S_{2n} = \frac{2n-1}{2n} S_{2n-2}$$

Dacă în această relaţie de recurenţă dăm lui n valorile $1, 2, \ldots, n$ obţinem

$$S_{2n} = \frac{2n-1}{2n} S_{2n-2},$$

$$S_{2n-2} = \frac{2n-3}{2n-2} S_{2n-4},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S_2 = \frac{1}{2} S_0.$$

Înmulţind membru cu membru aceste relaţii, obţinem

$$S_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} S_0,$$

unde

$$S_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} \text{ şi astfel } S_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2}$$

Înlocuind în expresia integralei, obținem

$$I = \frac{\pi}{2}\left[1 + \frac{0,3}{2}\cdot\frac{1}{2} + \cdots + \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 0,3^n + \ldots\right]$$

Obținem

$$\frac{I}{\pi} = \frac{1}{2} + \frac{0,3}{2\cdot 2^2} + \cdots + \frac{(0,3)^n}{2}\cdot\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 + \cdots$$

Seria obținută este o serie de numere pozitive pentru care

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = (0,3)\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2 < 0,3$$

În această situație, restul R_n este

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots < u_n(0,3 + 0,3^2 + \ldots) = u_n\frac{0,3}{1,7} =$$

$$= \frac{(0,3)^n}{2}\cdot\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2\frac{3}{7}\cdot < \frac{1}{10^3}\cdot$$ Se verifică pentru $n = 4$.

21. Să se calculeze

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)\sqrt{|x^2-1|}}$$

arătîndu-se mai întîi că are sens.

R: Se observă că integrantul este nemărginit într-o vecinătate a punctului $x = 1$. Scriem.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)\sqrt{|x^2-1|}} = \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}} + \int_1^\infty \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$$

Prima integrală din partea a doua are sens, deoarece

$$\lim_{x\to 1-0}(1-x)^\alpha \frac{1}{(x+1)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}},\ \text{pentru}\ \alpha = \frac{1}{2} < 1.$$

A doua integrală din partea a doua este improprie, de ambele tipuri. Însă

$$\lim_{x\to 1+0}(x-1)^{\alpha'} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2\sqrt{2}},\ \text{pentru}\ \alpha' = \frac{1}{2} < 1$$

și

$$\lim_{x\to\infty} x^\beta \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} = 1,\ \text{pentru}\ \beta = 2 > 1,$$

deci integrala din enunț are sens. În

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}$$

facem schimbarea de variabilă

$$x = \sin t, \quad \mathrm{d}x = \cos \mathrm{d}t \quad \text{şi} \quad [0, 1) \to \left[0, \frac{\pi}{2}\right),$$

deci

$$\mathrm{I}_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1 + \sin t}$$

În această nouă integrală facem substituţia

$$\operatorname{tg} \frac{t}{2} = u, \quad \cos t = \frac{2u}{1 + u^2}, \quad \mathrm{d}t = \frac{2\mathrm{d}u}{1 + u^2}, \quad \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \to [0, 1).$$

Obţinem

$$\mathrm{I}_1 = \int_0^1 \frac{1}{1 + \frac{2u}{1 + u^2}} \frac{2\mathrm{d}u}{1 + u^2} = 2 \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{(1 + u)^2} = -\frac{2}{1 + u}\Big|_0^1 = 1$$

În integrala

$$\mathrm{I}_2 = \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x + 1)\sqrt{x^2 - 1}},$$

facem schimbarea de variabilă

$$\sqrt{x^2 - 1} = t + x, \quad x^2 - 1 = t^2 + 2xt + x^2, \quad x = -\frac{1 + t^2}{2t}$$

$$x + 1 = -\frac{(t - 1)^2}{2t}, \quad \sqrt{x^2 - 1} = t - \frac{1 + t^2}{2t} = \frac{t^2 - 1}{2t},$$

$$\mathrm{d}x = -\frac{t^2 - 1}{2t^2}\mathrm{d}t, \quad (1, \infty) \to (-1, 0),$$

deci

$$\mathrm{I}_2 = \int_{-1}^0 \frac{2t}{(t - 1)^2} \cdot \frac{2t}{t^2 - 1} \cdot \frac{(t^2 - 1)}{2t^2}\,\mathrm{d}t = 2\,\frac{-1}{t - 1}\Big|_{-1}^0 = 1$$

rezultă că $\mathrm{I} = 2$.

O b s e r v a ţ i e. Dacă în integrala

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1 + x)\sqrt{1 - x^2}}$$

facem schimbarea $x = \frac{1}{y}$, obţinem

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1 + x)\sqrt{1 - x^2}} = -\int_\infty^1 \frac{\mathrm{d}y}{(1 + y)\sqrt{y^2 - 1}}$$

deci

$$\mathrm{I}_1 = \mathrm{I}_2 \quad \text{şi} \quad \mathrm{I} = 2\mathrm{I}_1.$$

22. Să se studieze convergența integralelor improprii:

a) $$\int_0^1 \frac{x^k - 1}{\ln x}\,dx; \quad k \in R$$

b) $$\int_1^\infty \cos x^2\,dx$$

R: a) Observăm că

$$\lim_{x \to 1-} \frac{x^k - 1}{\ln x} = \lim_{x \to 1-} \frac{kx^{k-1}}{\frac{1}{x}} = k$$

și

$$\lim_{x \to 0+} \frac{x^k - 1}{\ln x} = 0, \quad k \geqslant 0.$$

Pentru $k < 0$

$$\lim_{x \to 0+} \left| \frac{x^k - 1}{\ln x} \right| = \infty,$$

deoarece

$$\lim_{x \to 0+} x^\alpha \ln x = 0; \quad \alpha > 0$$

Rezultă astfel că există un η astfel ca

$$x^\alpha |\ln x| < 1, \quad \text{pentru } 0 < x < \eta,$$

sau încă

$$\frac{1}{|\ln x|} > x^\alpha,$$

de unde

$$\frac{x^k}{|\ln x|} > x^\alpha \cdot x^k, \quad k < 0.$$

Dar

$$\int_0^1 x^\alpha \cdot x^k\,dx \text{ este divergentă pentru } \alpha = -\frac{k+1}{2},$$

$k < -1$, și astfel, în baza criteriului comparației,

$$\int_0^1 \frac{x^k}{\ln x}\,dx \text{ este divergentă}$$

și deci și

$$\int_0^1 \frac{x^k - 1}{\ln x}\,dx \text{ este divergentă pentru } k < -1.$$

Pentru $-1 < k < 0$, alegem p astfel ca $-1 < k - p < 0$, $\left(\text{de exemplu } p = \frac{1+k}{2}\right)$ și inegalitatea

$$\frac{x^k}{|\ln x|} < x^{k-p}$$

arată că

$$\int_0^1 x^{k-p}\,dx$$

este convergentă pentru $p - k < 1 (-1 < k - p)$. Pentru $k = -1$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln x} = [\ln |\ln x|]_\varepsilon^{\frac{1}{2}} = +\infty$$

deci

$$\int_0^1 \frac{x^k - 1}{\ln x}\,dx$$

este definită numai pentru $k > -1$.

b) Se face schimbarea de variabilă

$$x^2 = t, \quad x = \sqrt{t}, \quad dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt$$

$$\int_1^\infty \cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,dt$$

Dar, integrînd prin părți:

$$\int_1^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\Big|_1^\infty + \frac{1}{2}\int_1^\infty \cdot \frac{\sin t}{t^{3/2}}\,dt$$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} = 0;$$

și

$$\left|\frac{\sin t}{t^{3/2}}\right| < \frac{1}{t^{3/2}}$$

și, în baza criteriului comparației

$\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^{3/2}}\,dt$ este absolut convergentă.

23. Să se calculeze integrala

$$I_n = \int_1^\infty \frac{dx}{x(x+1)\ldots(x+n)}$$

arătînd în prealabil că are sens.

R: Gradul numitorului este $(n+1)$, deci este mai mare strict decît 1 şi astfel integrala este convergentă. Pentru a calcula integrala, descompunem funcţia astfel:

$$\frac{1}{x(x+1)\dots(x+n)} = \frac{A_0}{x} + \frac{A_1}{x+1} + \dots + \frac{A_k}{x+k} + \dots + \frac{A_n}{x+n}$$

de unde rezultă

$$A_k = \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!}; \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

deci

$$\frac{1}{x(x+1)\dots(x+n)} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k \frac{1}{x+k}.$$

Calculăm

$$\int_1^A \frac{dx}{x(x+1)\dots(x+n)} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k Cn^k \ln|A+k| -$$

$$-\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k Cn^k \ln|1+k|.$$

Observăm că

$$\lim_{A\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k Cn^k \ln|A+k| = 0,$$

deoarece

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k Cn^k = (1-1)^n = 0$$

şi, astfel

$$I_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1} Cn^k \ln(1+k)$$

24. Fie $F(x) = -\int_0^k \ln\cos y\, dy$. Să se stabilească relaţia

$$F(x) = 2F\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) - 2F\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) - x\ln 2.$$

Să se calculeze $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ folosind această relaţie.

R: Observăm că, deoarece funcţia $\ln\cos y$ este pară, putem scrie

$$F(x) = -\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\ln\cos y\, dy.$$

Vom face schimbarea de variabilă

$$\frac{\pi}{2} - y = t$$

Obţinem

$$F(x) = +\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}+x}^{\frac{\pi}{2}-x} \ln \sin t \, dt = -\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\frac{\pi}{2}+x} \ln \sin t \, dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\frac{\pi}{2}+x} \ln\left(2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}\right) dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\frac{\pi}{2}+x} \left(\ln 2 + \ln \sin \frac{t}{2} + \ln \cos \frac{t}{2}\right) dt =$$

$$= -\frac{2x}{2} \ln 2 - \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\frac{\pi}{2}+x} \ln \sin \frac{t}{2} \, dt - \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\frac{\pi}{2}+x} \ln \cos \frac{t}{2} \, dt.$$

Observăm că

$$\int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\frac{\pi}{2}+x} \ln \sin \frac{t}{2} \, dt = \int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\frac{\pi}{2}+x} \ln \cos \frac{t}{2} \, dt,$$

deoarece, dacă în prima facem schimbarea de variabilă

$$\pi - t = y, \quad dt = -dy,$$

obţinem

$$\int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\frac{\pi}{2}+x} \ln \sin \frac{t}{2} \, dt = -\int_{\frac{\pi}{2}+x}^{\frac{\pi}{2}-x} \ln \cos \frac{y}{2} \, dy = \int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\frac{\pi}{2}+x} \ln \cos \frac{y}{2} \, dy,$$

Ţinînd seama de acest rezultat

$$F(x) = -x \ln 2 - \int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\frac{\pi}{2}+x} \ln \cos \frac{t}{2} \, dt$$

Cu schimbarea $\frac{t}{2} = y$, $dt = 2\,dy$,

$$F(x) = -x \ln 2 - 2\int_{\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}}^{\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}} \ln \cos y \, dy = -x \ln 2 - 2\int_0^{\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}} \ln \cos y \, dy +$$

$$+ 2\int_0^{\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}} \ln \cos y \, dy.$$

Pentru $x = \frac{\pi}{2}$, obținem

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2F\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2F(0) - \frac{\pi}{2}\ln 2;$$

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2F(0) + \frac{\pi}{2}\ln 2 = \frac{\pi}{2}\ln 2.$$

25. Să se stabilească natura seriei de termen general

$$u_n = \int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}}\,dx.$$

R: Funcția $e^{-\sqrt{x}}$ este continuă pe $[n, n+1]$ și deci formula de medie ne conduce la expresia

$$u_n = e^{-\sqrt{\xi_n}}, \quad \text{unde} \quad n < \xi_n < n+1.$$

Obținem în continuare

$$e^{-\sqrt{n+1}} < u_n = e^{-\sqrt{\xi_n}} < e^{-\sqrt{n}}.$$

Seria de termen general $v_n = e^{-\sqrt{n}}$ este convergentă în baza criteriului logaritmic, deoarece:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{v_n}}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln n} = \infty$$

26. Să se cerceteze dacă se poate integra termen cu termen șirul de funcții:

$$f_n(x) = \frac{nx - 1}{(x \ln n + 1)(1 + nx^2 \ln n)}, \quad x \in [0,1].$$

R: Pentru a se putea integra termen cu termen acest șir, trebuie ca șirurile $(f_n(x))_{n\in N}$ și $\left(\int f_n(x)\,dx\right)_{n\in N}$ să fie uniform convergente pe $[0,1]$. Se observă însă că șirul $f_n(x)$ nu este uniform convergent:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases}$$

Dacă alegem însă un șir $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, atunci șirul numeric

$$f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{\sqrt{n} - 1}{\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}} + 1\right)(1 + \ln n)} = +\infty$$

ceea ce arată că șirul de funcții nu este uniform convergent, datorită punctului $x = 0$.

Să integrăm termen cu termen şi să verificăm rezultatul obţinut.

$$g_n = \int_0^1 \frac{nx-1}{(x \ln n + 1)(1 + nx^2 \ln n)}\, dx =$$

$$= -\frac{1}{\ln n}\left[\ln \frac{(\ln n + 1)}{\sqrt{n \ln n + 1}} + \ln \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\ln n}} - \ln \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\ln n}}\right]$$

deci

$$g_n = -\frac{1}{\ln n}\left[\ln (\ln n + 1) - \frac{1}{2} \ln (n \ln n + 1)\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\ln n + \ln\left(\ln n + \frac{1}{n}\right)}{\ln n} - \frac{\ln(\ln n + 1)}{\ln n};$$

$$\lim_{n \to \infty} g_n = \frac{1}{2}$$

şi nu este egală cu $\int_0^1 f(x)\, dx$, adică 0.

27. a) Să se studieze natura integralei improprii

$$\int_0^\infty \sin x^2\, dx$$

b) Să se determine raza de convergenţă a seriei de puteri de termen general:

$$u_n = x^n \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin x^2\, dx$$

R: a) Se aplică criteriul de convergenţă pentru integrale improprii în care funcţia de sub integrală nu păstrează un semn constant.

Astfel dacă ţinem seama că

$$\sin x^2 > 0, \quad x \in (2n\pi, (2n+1)\pi)$$

$$\sin x^2 < 0, \quad x \in ((2n+1)\pi, (2n+2)\pi)$$

putem scrie

$$\int_0^\infty \sin x^2 dx = \sum_{k=0} \int_{\sqrt{2k\pi}}^{\sqrt{(2k+1)\pi}} \sin x^2\, dx + \sum_{k=0} \int_{\sqrt{(2k+1)\pi}}^{\sqrt{(2k+2)\pi}} \sin x^2\, dx$$

Seria din membrul al doilea fiind o serie alternată.

Facem schimbarea de variabilă

$$x^2 = y, \quad x = \sqrt{y}, \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y$$

$$\int_0^{\infty} \sin x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{\sin y}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y$$

$$(-1)^n \sin y > 0, \quad x \in (n\pi, (n+1)\pi)$$

iar $\frac{1}{\sqrt{y}}$ este o funcţie care descreşte monoton şi tinde la zero.

b) În acest caz

$$a_n = \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \frac{\sin y}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y$$

Avem:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

Dar,

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin y}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}\frac{\sin \xi}{\sqrt{\xi}}$$

$$n\pi < \xi < (n+1)\pi, \quad \sqrt{n\pi} < \sqrt{\xi} < \sqrt{(n+1)\pi}$$

$$\frac{\pi}{2}\frac{\sin \xi}{\sqrt{(n+1)\pi}} < a_n < \frac{\pi}{2}\frac{\sin \xi}{\sqrt{n\pi}}$$

Avînd în vedere această evaluare, obţinem $R = 1$, deci, $|x| < 1$.

Cum, pentru $|x| = 1$ se obţine seria numerică a cărei sumă este integrala de la punctul *a*)., rezultă că mulţimea de convergenţă a seriei de puteri este $|x| \leqslant 1$.

28. a) Să se arate că

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}\beta}{\operatorname{ch}\beta + \cos\theta} = \frac{\theta}{\sin\theta}, \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

b) Folosind a) să se calculeze $\frac{\mathrm{d}^n I}{\mathrm{d}\theta^n}$

R: a)

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}\beta}{\operatorname{ch}\beta + \cos\theta} = 2\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}\beta}{e^{\beta} + e^{-\beta} + 2\cos\theta}$$

Facem

$$e^{\beta} = u, \quad \beta = \ln u, \quad \mathrm{d}\beta = \frac{\mathrm{d}u}{u};$$

cu aceasta, I devine

$$I = 2\int_1^{\infty} \frac{du}{u\left(u + \frac{1}{u} + 2\cos\theta\right)} = 2\int_1^{\infty} \frac{du}{u^2 + 2u\cos\theta + 1} =$$

$$= 2\int_1^{\infty} \frac{du}{(u + \cos\theta)^2 + \sin^2\theta} = \frac{2}{\sin\theta} \operatorname{arctg} \frac{u + \cos\theta}{\sin\theta}\Big|_{u=1}^{u=\infty} =$$

$$= \frac{2}{\sin\theta}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcttg} \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta}\right) = \frac{2}{\sin\theta}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{2}{\sin\theta}\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)\right) = \frac{\theta}{\sin\theta};$$

b) Derivăm în raport cu θ în relația de la punctul a)

$$\frac{d}{d\theta}\int_0^{\infty} \frac{d\beta}{\operatorname{ch}\beta + \cos\theta} = +\sin\theta \int_0^{\infty} \frac{d\beta}{(\operatorname{ch}\beta + \cos\theta)^2}.$$

Am putut deriva sub semnul integral, deoarece

$$\int_0^{\infty} \frac{d\beta}{(\operatorname{ch}\beta + \cos\theta)^2} \leqslant \int_0^{\infty} \frac{d\beta}{\operatorname{ch}^2\beta}$$

și, cum integrala din membrul doi este convergentă, rezultă că prima integrală este uniform convergentă.

Dar:

$$\frac{dI}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right)$$

și, astfel

$$\int_0^{\infty} \frac{d\beta}{(\operatorname{ch}\beta + \cos\theta)^2} = \frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right)$$

care se mai poate scrie, dacă ținem seama de derivata unei funcții compuse, astfel:

$$\int_0^{\infty} \frac{d\beta}{(\operatorname{ch}\beta + \cos\theta)^2} = \frac{d}{d(-\cos\theta)} \cdot \left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right)$$

Repetînd același procedeu de n ori, obținem

$$(n-1)!\int_0^{\infty} \frac{d\beta}{(\operatorname{ch}\beta + \cos\theta)^n} = \frac{d^{n-1}}{d(-\cos\theta)^{n-1}}\left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right).$$

Observație: Această integrală apare în calculul probabilităților la studiul variabilelor aleatoare normale bidimensionale.

29. Să se arate că valoarea principală (v.p.) în sensul lui Cauchy pentru integrala $\int_0^\infty \frac{dx}{1-x^2}$ este nulă.

R: v.p.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1-x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{1-x^2} + \int_{1+\varepsilon}^\infty \frac{dx}{1-x^2}\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{2}\int_0^{1-\varepsilon}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)dx + \frac{1}{2}\int_{1+\varepsilon}^\infty\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)dx\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2}\Big(-\ln|1-x|\Big|_0^{1-\varepsilon} + \ln|1+x|\Big|_0^{1-\varepsilon} - \ln|1-x|\Big|_{1+\varepsilon}^\infty +$$

$$+ \ln|1+x|\Big|_{1+\varepsilon}^\infty\Big) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2}\left(-\ln\varepsilon + \ln(2-\varepsilon) + \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\Big|_{x=\infty} +\right.$$

$$\left. + \ln\varepsilon - \ln(2+\varepsilon)\right) = 0.$$

30. Să se calculeze

$$I_m = \int_0^\infty x^m e^{-\frac{nx^2}{2}}\,dx.,\ m,\ n\in N.$$

Să se deducă valoarea lui

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2/2}\,dx.$$

R: Integrînd prin părţi:

$$I_m = \frac{m-1}{n} I_{m-2},\quad (m>1,\ n>0;$$

pentru orice t real

$$\int_0^\infty x^m(x-t)^2 e^{-nx^2/2}\,dx > 0.$$

De aceea $I_{m+2} - 2tI_{m+1} + t^2 I_m > 0$ pentru orice t, deci:

$$I_{m+1} < \sqrt{I_m I_{m+2}}$$

Dacă facem $m = n$, $m = n-1$ şi folosim relaţia de recurenţă pentru n egal cu $n+1$ şi $m+2$, obţinem:

$$I_{n+2} > I_{n+1} > I_n.$$

Pentru $n = 2k + 1$, $k \in N$, obţinem

$$I_{2k+1} = \frac{(2 \cdot k)!!}{(2k+1)^{k+1}}, \quad I_{2k+2} = \frac{(2k+1)!!}{(2k+1)^{k+1}} I_0 \quad I_{2k+3} = \frac{(2k+2)!!}{(2k+1)^{k+2}}$$

$$I_0 = \int_0^\infty e^{-nx^2/2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^\infty e^{-t^2/2}\, dt$$

prin schimbarea de variabilă $x\sqrt{n} = t$.

Luînd $n = 2k + 1$, obţinem $I = 2\sqrt{k+1}\, I_0$, înlocuind în dubla inegalitate,

$$\left(1 + \frac{1}{2k+1}\right) \frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \frac{1}{\sqrt{2k+1}} > I > \frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$$

şi, folosind formulele lui Wallis, obţinem:

$$\int_0^\infty e^{-u^2/2}\, du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

31. Să se calculeze

$$I = \int_0^\infty (\sqrt[n]{x^n + 1} - x)\, dx, \quad n > 1$$

arătînd în prealabil că are sens.

R: Facem schimbarea de variabilă

$$\frac{x^n}{x^n + 1} = t, \quad x^n = t(x^n + 1), \quad x^n(1 - t) = t; \quad x = t^{\frac{1}{n}}(1 - t)^{-\frac{1}{n}};$$

$$dx = \left(\frac{1}{n} t^{\frac{1}{n} - 1}(1 - t)^{-\frac{1}{n}} + \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}} \cdot (1 - t)^{-\frac{1}{n} - 1}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n} - 1}(1 - t)^{-\frac{1}{n} - 1}\, dt.$$

Atunci:

$$I = \int_0^1 ((1 - t)^{-\frac{1}{n}} - t^{\frac{1}{n}} (1 - t)^{-\frac{1}{n}})\, dt =$$

$$= \int_0^1 (1 - t)^{-\frac{1}{n}}\, dt - \int_0^1 t^{\frac{1}{n}}(1 - t)^{-\frac{1}{n}}\, dt =$$

$$= B\left(1, 1 - \frac{1}{n}\right) - B\left(1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right) =$$

$$= \frac{\Gamma(1)\,\Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(2 - \frac{1}{n}\right)} - \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\Gamma(2)} =$$

$$= \frac{\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)} - \frac{\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}{1!} =$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{n}} - \frac{1}{n}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}.$$

Integrala transformată este o funcție beta, deoarece:

$$1-\frac{1}{n}>0 \quad \text{și} \quad 1-\frac{1}{n}>0, \text{ pentru } n>1.$$

32. Să se calculeze

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{\pi^2 - x^2}\,dx$$

R: $\frac{1}{\pi^2-x^2} = \frac{A}{\pi-x} + \frac{B}{\pi+x}$, $A = \frac{1}{2\pi}$, $B = \frac{1}{2\pi}$

deci:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left(\frac{1}{\pi-x}+\frac{1}{\pi+x}\right)\sin^2 x\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin^2 x}{\pi-x}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin^2 t}{t}\,dt = 0$$

($\pi - x = t$, $x = \pi - t$, $dx = -dt$) deoarece este o funcție impară.

33. Să se studieze convergența integralelor:

a) $\int_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x}\,dx$,

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{|x-a_1|^{p_1}|x-a_2|^{p_2}\ldots|x-a_n|^{p_n}}$, $a_i \neq a_j \neq 0$

R: a) Notăm

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^p \ln^q \frac{1}{x}\,dx, \quad I_2 = \int_{\frac{1}{2}}^1 x^p \ln^q \frac{1}{x}\,dx.$$

Studiem pe rînd convergența fiecăreia dintre aceste integrale.

Pentru I_1, dacă

$$p \geqslant 0, \quad \lim_{x\to 0+} x^p \ln^q \frac{1}{x} = \text{finit},$$

pentru

$$q \leqslant 0$$

și

$$\lim_{x\to 0+} x^p \ln^q \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(-\ln x)^q}{x^{-p}} = \lim_{x\to 0} \frac{q(-\ln x)^{q-1}}{px^{-p}} = 0$$

pentru $q>0$, deci pentru $p \geqslant 0$ și orice q integrala I_1 nu este improprie.

Pentru $p<0$ și orice q; $\lim\limits_{x\to 0} x^p(-\ln x)^q$ infinit. Aplicăm criteriul suficient

$$\lim_{x\to 0} x^\alpha x^p(-\ln x)^q = \lim_{x\to 0} \frac{(-\ln x)^q}{x^{-\alpha}-p} = \lim_{x\to 0} \frac{-q(-\ln x)^{q-1}}{(\alpha+p)x^{-\alpha-p}} = \ldots = 0$$

dacă $-\alpha - p > 0$, de unde $\alpha + p > 0$, integrala este convergentă pentru $\alpha < 1$, deci $1 + p > 0$, $p > -1$.
I_1 convergentă pentru $p > -1$, $q \in R$.

Studiem integrala I_2 care este improprie, dacă $q<0$; calculăm

$$\lim_{x\to 1-} x^p(-\ln x)^q \cdot (1-x)^\alpha = \lim_{x\to 1-} (1-x)^{\alpha+q} \frac{(-\ln x + \ln 1)^q}{(1-x)^q} = (+\ln x)\Big|_{x=1}^{q} \times$$

$$\times \lim_{x\to 1-} (1-x)^{\alpha+q} = 1; \quad \alpha + q = 0.$$

Pentru ca integrala să fie convergentă, trebuie $\alpha < 1$, $-q < 1$, $q > -1$; I_2 este convergentă pentru $q > -1$ și orice p; rezultă I convergentă pentru $p > -1$, $q > -1$.

b) Punctele singulare ale funcției de sub integrală sînt $-\infty$, a_1, a_2, ..., a_n, $+\infty$, dar

$$\lim_{x\to a_i} |x-a_i|^\alpha f(x) = \frac{1}{|a_i-a_1|^{p_1} \ldots |a_i-a_{i-1}|^{p_{i-1}} \cdot |a_i-a_{i+1}|^{p_{i+1}} \ldots |a_i-a_n|^{p_n}}$$

pentru $\alpha = p_i$. Deci pentru $p_i < 1$, $i = 1, \ldots, n$ integrala este convergentă.

În plus, datorită faptului că intervalul de integrare este nemărginit,

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha f(x) = 1; \quad \alpha = p_1 + \ldots + p_n > 1.$$

34. Să se calculeze $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ arătînd în prealabil că

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \int_0^\infty \lim_{n\to 0} \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx.$$

R: Observăm că

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n} \leqslant \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$$

ceea ce rezultă din aplicarea inegalității lui Bernoulli

$$\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n \geqslant 1 + x^2$$

Rezultă că $\int_0^\infty \frac{dx}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n}$ este uniform convergentă, deci se poate trece la limită sub semnul integrală şi

$$\int_0^\infty \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n}\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{dx}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n}.$$

Calculăm

$$I_n = \int_0^\infty \frac{dx}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n}$$

notăm:

$$\frac{x}{\sqrt{n}} = y; \quad dx = \sqrt{n}\,dy$$

deci:

$$I_n = \sqrt{n}\int_0^\infty \frac{dy}{(1+y^2)^n}$$

$$I_n = \int_0^\infty \frac{dy}{(1+y^2)^n} = \frac{y}{(1+y^2)^n}\Big|_0^\infty + 2n\int_0^\infty \frac{y^2}{(y^2+1)^{n+1}}\,dy$$

$$I_n = 2n\,I_n - 2n\,I_{n+1} \to I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n$$

de unde rezultă:

$$I_{n+1} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\frac{\pi}{2}$$

$$I_n = \sqrt{n}\,\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\,\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \frac{\pi}{2}\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

ultima limită rezultă din formula lui Wallis [26] deci:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

35. Să se calculeze

$$I(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\alpha\,\mathrm{tg}\,x)\,dx, \quad \alpha \geqslant 0.$$

R: Derivăm pe $I(\alpha)$. Avem

$$I'(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{tg}\,x}{1+\alpha\,\mathrm{tg}\,x}\,dx.$$

Dacă punem $\operatorname{tg} x = u$, rezultă $x = \operatorname{arctg} u$, $dx = \frac{du}{1+u^2}$, $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \to (0, 1)$, deci

$$I'(\alpha) = \int_0^1 \frac{u}{1+\alpha u} \cdot \frac{du}{1+u^2}, \quad \frac{u}{(1+\alpha u)(1+u^2)} = \frac{A}{1+\alpha u} + \frac{Bu+C}{1+u^2}$$

cu

$$A = -\frac{\alpha}{1+\alpha^2}, \quad B = \frac{1}{1+\alpha^2}, \quad C = \frac{\alpha}{1+\alpha^2}$$

obținem

$$I'(\alpha) = -\frac{1}{1+\alpha^2}\ln(1+\alpha u)\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\frac{1}{1+\alpha^2}\ln(1+u^2)\Big|_0^1 +$$

$$+\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\operatorname{arctg} u\Big|_0^1 = -\frac{1}{1+\alpha^2}\ln(1+\alpha) + \frac{1}{2}\frac{1}{1+\alpha^2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}\frac{\alpha}{1+\alpha^2}$$

$$I(\alpha) = \frac{\ln 2}{2}\operatorname{arctg}\alpha + \frac{\pi}{8}\ln(1+\alpha^2) - \Phi(\alpha)$$

unde

$$\Phi(\alpha) = \int \frac{1}{1+\alpha^2}\ln(1+\alpha)\,d\alpha,$$

anume se ia pentru $\Phi(\alpha)$ primitiva care satisface condiția $\Phi(0) = 0$.

36. Folosind valoarea integralei

$$I(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}\,dx, \quad (\alpha \geqslant 0)$$

Să se calculeze

$$D(\beta) = \int_0^\infty \frac{\sin\beta x}{x}\,dx$$

R: Calculăm:

$$I'(\alpha) = -\int_0^\infty x e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}\,dx = -\int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin\beta x\,dx =$$

$$= -\left[-\frac{e^{-\alpha x}}{\beta}\cos\beta x\Big|_0^\infty - \frac{\alpha}{\beta}\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos\beta x\,dx\right] =$$

$$= -\frac{1}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta}\left[\frac{1}{\beta}e^{-\alpha x}\sin\beta x\Big|_0^\infty + \frac{\alpha}{\beta}\int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin\beta x\,dx\right] = -\frac{1}{\beta} - \frac{\alpha^2}{\beta^2}I'(\alpha)$$

de aici

$$I'(\alpha) = \frac{-\frac{1}{\beta}}{1+\frac{\alpha^2}{\beta^2}}; \quad I'(\alpha) = -\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}$$

$$I(\alpha) = -\operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha}{\beta} + C(\beta).$$

Pentru

$$\alpha \to \infty; \quad I(\alpha) \to 0, \quad \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta} \to \frac{\pi}{2}$$

deci

$$C(\beta) = \frac{\pi}{2};$$

obținem

$$I(\alpha) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta}.$$

Pentru $\alpha = 0$ se obține $D(\beta) = I(0) = \frac{\pi}{2}$. (Am putut deriva sub semnul integral, deoarece: $\int_0^\infty e^{-\alpha x} \sin \beta x \, dx$ este uniform convergentă.)

37. Folosind integrarea sub semnul integral, să se calculeze:

$$\int_0^1 \cos\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx, \quad a > 0, \quad b > 0$$

R: $\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^t \, dt$ și, inversînd ordinea de integrare

$$\int_0^1 \cos\left(\ln \frac{1}{x}\right) \left(\int_a^b x^t \, dt\right) dx = \int_a^b \left(\int_0^1 x^t \cos(-\ln x) \, dx\right) dt$$

Să notăm

$$I = \int_0^1 x^t \cos(-\ln x) \, dx = \int_{-\infty}^0 e^{u(t+1)} \cos u \, du$$

$$x = e^u; \quad dx = e^u \, du$$

și să calculăm integrala prin părți

$$I = \int_{-\infty}^0 e^{u(t+1)} \cos u \, du = e^{u(t+1)} \sin u \Big|_{-\infty}^0 -$$

$$- \int_{-\infty}^0 (t+1) e^{u(t+1)} \sin u \, du = -(t+1) \int_{-\infty}^0 e^{u(t+1)} \sin u \, du =$$

$$= -(t+1) \left[e^{u(t+1)} (-\cos u) \Big|_{-\infty}^0 + (t+1) \int_{-\infty}^0 e^{u(t+1)} \cos u \, du \right] =$$

$$= -(t+1)[-1 + (t+1) I]$$

deci:

$$I(2 + 2t + t^2) = t + 1;$$

$$I = \frac{t+1}{t^2 + 2t + 2};$$

obținem

$$\int_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\left(\int_a^b x^t\,dt\right)dx = \int_a^b \frac{t+1}{(t+1)^2+1}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\ln[1+(t+1)^2]\Big|_a^b = \frac{1}{2}\ln\frac{1+(b+1)^2}{1+(a+1)^2}.$$

38. Să se determine domeniul de existență și să se exprime cu ajutorul integralelor euleriene următoarele integrale:

$$\text{a)}\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^m}},\quad m>0;\quad \text{b)}\ \int_0^\infty x^p e^{-ax}\ln x\,dx,\quad a>0$$

$$\text{c)}\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\cos^n x\,dx;\quad \text{d)}\int_0^\infty \frac{x^{m-1}\,dx}{(1+x)^n}$$

R: a) Facem schimbarea de variabilă

$$x^m = t;\quad x = t^{\frac{1}{m}},\quad dx = \frac{1}{m}t^{\frac{1}{m}-1}\,dt;$$

integrala devine:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^m}} = \frac{1}{m}\int_0^1 t^{\frac{1}{m}-1}(1-t)^{\frac{1}{n}}\,dt = \frac{1}{m}B\left(\frac{1}{m},\ \frac{1}{n}+1\right):$$

deci integrala este convergentă pentru

$$\frac{1}{m}>0,\quad \frac{1}{n}+1>0 \text{ sau } m>0,\ n>-1.$$

b) Considerăm

$$I = \int_0^\infty x^p e^{-ax}\,dx$$

în care facem

$$ax = u,\quad dx = \frac{1}{a}du;$$

rezultă

$$I = \frac{1}{a^{p+1}}\int_0^\infty u^p e^{-u}\,du = \frac{1}{a^{p+1}}\Gamma(p+1),\quad p>-1$$

deci

$$\int_0^\infty x^p e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a^{p+1}}\Gamma(p+1)$$

Derivăm în această relaţie în raport cu p

$$\int_0^\infty x^p e^{-ax} \ln x \, dx = -\frac{\ln a}{a^{p+1}} \Gamma(p+1) + \frac{1}{a^{p+1}} \frac{d\Gamma}{dp}.$$

Am putut proceda astfel, deoarece

$$\int_0^\infty x^p e^{-ax} \, dx$$

este convergentă uniform.

c) În această integrală facem schimbarea

$$\sin x = \sqrt{t}, \quad \cos x \, dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}};$$

obţinem:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{\frac{m}{2}} (1-t)^{\frac{n-1}{2}} \, dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{m}{2}+1, \frac{n+1}{2}\right),$$

$$\frac{m}{2}+1>0, \quad \frac{n+1}{2}>0 \text{ sau } m>-2, \quad n>-1.$$

d) $\int_0^\infty \frac{x^{m-1} \, dx}{(x+1)^n}$

se transformă în

$$\int_0^1 (1-t)^{n-m-1} t^{m-1} \, dt$$

prin schimbarea

$$\frac{x}{x+1} = t, \quad dx = -\frac{dt}{(1-t)^2};$$

deci

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1} \, dx}{(x+1)^n} = B(n-m, m)$$

şi este convergentă pentru $n>m$, $m>0$.

39. Se dau funcţiile

$$f(x) = \frac{1}{(2x-1)^2}, \quad x \in [1, \infty)$$

$$g(x) = (-1)^n E(x), \quad x \in [n, n+1), \quad n = 1, 2, \ldots$$

să se calculeze integrala Stieltjes

$$\int_0^\infty f(x) \, dg(x).$$

R: Avem

$$\int_1^\infty f(x)\,dg(x) = \sum_1^\infty \frac{1}{(2n+1)^2}\cdot((-1)^{n+1}(n+1) - (-1)^n n) =$$

$$= \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}(2n+1) = 1 + \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1};$$

însă din

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots, \quad |x| < 1$$

obţinem

$$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots, \quad |x| < 1$$

deci

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \ldots = \frac{\pi}{4},$$

prin urmare

$$\int_1^\infty f(x)\,dg(x) = \frac{4-\pi}{4}$$

40. Se dau funcţiile

$$f(x) = \sin(nax), \quad x \in [0, 1],$$

$$g(x) = k, \quad x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

$$g(1) = n - 1,$$

şi se cere să se calculeze integrala Stieltjes.

$$\int_0^1 f(x)\,dg(x),$$

R: f este continuă pe [0, 1] iar $g(x)$ este cu variaţia mărginită. Deoarece g este o funcţie în scară avem

$$\int_0^1 f(x)\,dg(x) = \sum_1^n f(x_k)(c_k - c_{k-1}) = \sum_1^{n-1} \sin ka = \frac{\sin\frac{n-1}{2}a \sin\frac{n}{2}a}{\sin\frac{a}{2}},$$

$$c_k = \frac{k}{n}, \quad c_{k-1} = \frac{k-1}{n}$$

41. Se dau funcţiile

$$f(x) = \frac{1}{x+1}, \quad x \in [1, \infty),$$

şi

$$g(x) = \frac{1}{n}, \quad x \in [n, n+1),$$

să se calculeze integrala Stieltjes

$$\int_1^\infty f(x)\, dg(x).$$

R: Avem

$$\int_1^\infty f(x)\, dg(x) = \sum_1^\infty \frac{1}{n+2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) = -\sum_1^\infty \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

însă

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{n+2},$$

deci

$$\sum_{k=1}^{n} = \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} +$$

$$+ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+2} =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$

de unde rezultă

$$\int_1^\infty f(x)\, dg(x) = +\frac{1}{4}$$

42. Să se calculeze

$$\int_0^1 x^2\,dg(x), \quad \text{unde} \quad g(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ x^4\,\mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right), & x\in(0,1]\end{cases}$$

arătînd în prealabil că există.

R: Pentru ca integrala să aibă sens trebuie să arătăm că $g(x)$ este o funcție cu variație mărginită.

Fie d: $0=x_n<x_{n-1}<\ldots<x_1<x_0=1$
o diviziune a intervalului $[0, 1]$.
Din definiție

$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right)=\begin{cases}1, & x\in\left(\frac{1}{2}, 1\right],\\ 2, & x\in\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right],\\ 3, & x\in\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right],\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ k, & x\in\left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{cases}$$

Calculăm

$$V_d(f)=\sum_{i=0}^{n-1}|f(x_i)-f(x_{i+1})|$$

observăm că

$$f(x_i)-f(x_{i+1})=\begin{cases}k(x_i^4-x_{i+1}^4)<k\left(\frac{1}{k^4}-\frac{1}{(k+1)^4}\right)<\frac{4}{k^3(k+1)},\\ \text{pentru}\\ x_i,\ x_{i+1}\in\left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right],\\ kx_i^4-(k+1)\,x_{i+1}^4<\frac{k}{k^4}-\frac{k+1}{(k+1)^4}<\frac{3}{k^3(k+1)},\\ \text{pentru}\\ x_i\in\left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right], \quad x_{i+1}\in\left(\frac{1}{k+2}, \frac{1}{k+1}\right],\end{cases}$$

deci, oricum

$$V_d(f)\leqslant\sum_k\frac{4}{k^3(k+1)}<M$$

deoarece reprezintă suma parțială a unei serii convergente.

Pentru calculul integralei aplicăm formula de integrare prin părţi

$$\int_0^1 x^2\,dg(x) = x^2\,g(x)\Big|_0^1 - 2\int_0^1 x\,g(x)\,dx = 1 - 2\sum_{k=1}^{1}\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} kx^5 dx =$$

$$= 1 - \frac{2}{6}\sum_1^\infty\left[\frac{1}{k^5} - \frac{k}{(k+1)^6}\right] = 1 - \frac{1}{3}\left(1 + \sum_2^\infty \frac{1}{n^6}\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n^6}.$$

43. Să se arate că nu există o mulţime E în intervalul $(0, 1)$ care să aibă măsura Lebesque, $m(E)$ şi să satisfacă condiţiile:
1) $0 < m(E) < 1$, 2) $m(E \cap (0, c)) = rc$, pentru toţi c, $0 \leqslant c \leqslant 1$ şi r fixat.

R: Să presupunem că există o asemenea mulţime E. Atunci pentru fiecare interval, $I = (a, b) \subset (0, 1)$ avem $m(E \cap I) = rm(I)$.

Din definiţia lui $m(E)$ rezultă că pentru orice $\delta > 0$ putem alege un şir numărabil de intervale $I_k, I_k \subset (0, 1)$ astfel ca:

$$\bigcup_{k=1}^\infty I_k \supset E \quad \text{şi} \quad (1 + \delta)\,m(E) > \sum_{k=1}^\infty m(I_k).$$

Şirul $\{I_k \cap E\}$ acoperă pe E, deci:

$$m(E) \leqslant \sum_1^\infty m(I_k \cap E) = \sum_1^\infty rm(I_k) = r\sum_1^\infty m(I_k) < rm(E)(1 + \delta).$$

De aceea $r > \frac{1}{1+\delta}$ pentru toţi $\delta > 0$ ceea ce implică $r \geqslant 1$.
Astfel $m(E) \geqslant m(E) \cap (0, 1) = r \cdot 1 \geqslant 1$ ceea ce contrazice ipoteza.

44. Fie $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un spaţiu măsurabil şi fie f o funcţie nenegativă cu valori reale mărginite, $\mathcal{A}$ măsurabilă pe X. Fie $\alpha = \inf\{f(x), x \in X\}$ şi $\beta = \sup\{f(x), x \in X\}$. Pentru $n \in N$ şi $j = 1, 2, \ldots, n-1$, fie

$$A_j = \left\{x \in X : \alpha + \frac{(j-1)(\beta-\alpha)}{n} \leqslant f(x) \leqslant \alpha + j\frac{(\beta-\alpha)}{n}\right\}$$

şi

$$A_n = \left\{x \in X : \alpha + \frac{(n-1)(\beta-\alpha)}{n} \leqslant f(x) \leqslant \beta\right\}.$$

Să se arate că sumele Lebesgue corespunzătoare acestei partiţii tind pentru $n \to \infty$ către o limită finită (integrala Lebesgue)

R: Din definiţia integralei Lebesgue.

$$L(f) = \sup\left\{\sum_{j=1}^n \left(\alpha + \frac{(j-1)(\beta-\alpha)}{n}\right)\mu(A_j)\right\};$$

dar

$$\mu(A_j) = \frac{\beta - \alpha}{n},$$

deci

$$L(f) = \sup\left\{\sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha(\beta-\alpha)}{n} + \frac{\beta-\alpha}{n^2}\sum_{j=1}^{n}(j-1)\right\} =$$

$$= \sup\left\{\alpha(\beta-\alpha) + \frac{(\beta-\alpha)^2}{n^2}\,\frac{n(n-1)}{2}\right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\alpha(\beta-\alpha) + \frac{(\beta-\alpha)^2}{2}\cdot\frac{n-1}{n}\right] = \frac{\beta^2-\alpha^2}{2}$$

45. Fie $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un spaţiu măsurabil astfel ca $\mu(X) = 1$ şi fie f o funcţie $\alpha_1^+(X, \mathcal{A}, \mu)$.
Să se arate că

$$\int_X \ln f(x)\, d\mu(x) \leqslant \ln \int_X f(x)\, d\mu(x).$$

R: Să considerăm funcţia

$$f(t) = \ln t - t + 1, \quad t \in (0, \infty),$$

$$f'(t) = \frac{1}{t} - 1 = \frac{1-t}{t}, \quad f'(t) = 0, \quad t = 1,$$

deci $t = 1$ este un punct de extrem şi anume un punct de maxim şi $f(t) \leqslant f(1)$ de unde

$$\ln t - t + 1 \leqslant 0, \quad \ln t \leqslant t - 1.$$

Să luăm

$$t = \frac{f(x)}{\int_X f(x)\, d\mu(x)}$$

şi să integrăm pe X.

$$\int_X \ln \frac{f(x)}{\int_X f(x)\, d\mu(x)}\, d\mu(x) \leqslant \int_X \frac{f(x)\, d\mu(x)}{\int_X f(x)\, d\mu(x)} - \mu(x),$$

sau încă

$$\int_X \ln f(x)\, d\mu(x) - \int_X \ln\left(\int_X f(x) d\mu(x)\right) d\mu(x) \leqslant 0,$$

de unde rezultă inegalitatea cerută.

46. Fie $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un spațiu măsură și τ o aplicație a lui x pe Y. Fie $\mathcal{B}$ familia tuturor submulțimilor $B \subset Y$ astfel ca $\tau^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Pentru $B \in \mathcal{B}$ fie $\nu(B) = \mu(\tau^{-1}(B))$. Să se arate că $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ este un spațiu măsură.

R: Trebuie să arătăm că $\mathcal{B}$ este σ — algebră de părți a lui Y și ν este o măsură numărabil aditivă.

Fie

$$A \in \mathcal{B}, \quad \tau^{-1}(B) \in \mathcal{A}.$$

Știm că

$$\tau^{-1}(CA) = C(\tau^{-1}(B)) \in \mathcal{A} \quad \text{deci} \quad CA \in \mathcal{B}.$$

Fie

$$(A_n)_{n \in N} \in \mathcal{B} \rightarrow \tau^{-1}(A_n) \in \mathcal{A},$$

dar:

$$\tau^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{1}^{\infty} \tau^{-1}(A_n) \in \mathcal{A},$$

deci

$$\bigcup_{1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}.$$

Cu acesta am arătat că $\mathcal{B}$ este σ — algebră cînd $\mathcal{A}$ este σ — algebră.

Să arătăm că ν este o măsură.

Fie

$$A \in \mathcal{B}; \quad \nu(A) = \mu(\tau^{-1}(A),$$

dar

$$\tau^{-1}(A) \in \mathcal{A} \quad \text{și} \quad \mu(B) \geqslant 0,$$

unde

$$B = \tau^{-1}(A)$$

deci

$$0 \leqslant \nu(A) = \mu(B) < \infty$$

$$\nu(\phi) = \mu(\tau^{-1}\phi),$$

dar,

$$\tau^{-1}(\phi) = \phi$$

deci

$$\nu(\phi) = \mu(\phi) = 0.$$

Fie

$$(A)_{n=1}^{\infty} \in \mathfrak{K}, \quad A_i \cap A_j ; = \phi, \quad i \neq j$$

rezultă

$$\gamma\left(\bigcup_1^{\infty} A_i\right) = \mu\left(\tau^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \tau^{-1}(A_i)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\tau^{-1}(A_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma(A_i);$$

am folosit faptul că $\tau^{-1}(A_i)$ sînt submulțimi din $\mathcal{A}$ pentru care

$$\tau^{-1}(A_i) \cap \tau^{-1}(A_j) = \phi, \quad i \neq j$$

pentru că în caz contrar dacă ar avea un element comun x,

$$x \in \tau^{-1}(A_i) \to \tau(x) \in A_i$$

$$x \in \tau^{-1}(A_j) \to \tau(x) \in A_j$$

dar $A_i \cap A_j = \phi$.

Cu acestea am arătat că $(Y, \mathfrak{K}, \nu)$ este spațiu măsură.

47. Fie o mulțime X oarecare și $\mathcal{A}$ o algebră de submulțimi a lui X. Fie μ o măsură numărabil aditivă pe $\mathcal{A}$ și $\overline{\mu}$ o funcție de mulțime pe $\mathfrak{P}(X)$ definită astfel:
Pentru $T \subset X$

$$\overline{\mu}(T) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n);\ T \subset \bigcup_1^{\infty} A_n;\ A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}\right\}.$$

a) Să se arate că μ este o măsură exterioară pe $\mathfrak{P}(X)$.

R: Trebuie arătat că

1) $0 \leqslant \overline{\mu}(T) \leqslant \infty$ pentru orice $T \subset X$,

2) $\overline{\mu}(\phi) = 0$

3) $\overline{\mu}(T) \leqslant \overline{\mu}(T^*)$, dacă $T \subset T^* \subset X$,

4) $\overline{\mu}\left(\bigcup_1^{\infty} T_n\right) \leqslant \sum_1^{\infty} \overline{\mu}(T_n)$ pentru orice șir $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ de submulțimi din X.

1) și 2) rezultă din faptul că $\mu(A_n) \geqslant 0$ și $\mu(\phi) = 0$.
Vom demonstra 4) fie

$$T_n \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} A_{nm}, \quad A_{n,m} \in \mathcal{A}$$

pentru

$$m = 1, 2, \ldots; \text{ avem } \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_{nm}\right)$$

dar:

$$\overline{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n\right) = \inf\left\{\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_{nm}\right)\right),\ T_n \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} A_{nm}\right\} =$$

$$= \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_{nm}\right),\ T_n \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} A_{nm}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \inf\left\{\mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_{nm}\right),\ T_n \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} A_{nm}\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(T_n).$$

Pentru 3) folosim acelaşi raţionament.

$$\mu(T^*) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),\ T^* \subset \bigcup_{1}^{\infty} A_n,\ A_i \subset \mathcal{A}\right\}$$

şi

$$T \subset T^* \subset \bigcup_{1}^{\infty} A_n, \quad \text{deci} \quad \bigcup_{1}^{\infty} A_n$$

acoperă şi mulţimea T; mulţimile $(A_n)_{n\in N}$, $A_i \in \mathcal{A}$ reprezintă o parte din mulţimile a căror reuniune acoperă pe T şi atunci putem scrie că

$$\inf\left\{\sum_{1}^{\infty} \mu(A_n),\ T \subset \bigcup_{1}^{\infty} A_n,\ A_i \in \mathcal{A}\right\} \geqslant$$

$$\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n),\ T \subset \bigcup_{1}^{\infty} B_n,\ B_i \subset \mathcal{A}\right\} = \overline{\mu}(T),$$

deci

$$\overline{\mu}(T) \leqslant \overline{\mu}(T^*),$$

unde cu $(B_i)_{i\in N}$ am notat toate submulţimile din $\mathcal{A}$ a căror reuniune acoperă pe T.

48. Dacă $f(x) \geqslant 0$ pe o mulţime $E \subset R$ şi dacă:

$$\int_E f(x)\, dx = 0,$$

funcţia $f(x)$ este nulă aproape peste tot pe E.

R: Trebuie demonstrat că măsura mulţimii $E(f > 0)$ este zero. Putem scrie

$$E^*(f > 0) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n^*\left(f \geqslant \frac{1}{n}\right)$$

unde $E^*(f > 0)$ este mulţimea punctelor $x \in E$ cu $f(x) > 0$. Fie de exemplu mulţimea

$$E' = E_{n_0}^*\left[f \geqslant \frac{1}{n_0}\right]$$

mulţime ce are o măsură diferită de zero.

Dacă luăm $E'' = E - E'$ avem:

$$\int_E f(x)\,dx = \int_{E'} f(x)\,dx + \int_{E''} f(x)\,dx$$

dar

$$\int_{E'} f(x)\,dx \geqslant \frac{1}{n_0} m(E') > 0$$

deci

$$\int_E f(x)\,dx > 0$$

ceea ce nu se poate deoarece $\int_E f(x)\,dx = 0$ prin ipoteză.

Rezultă că măsura mulțimii E' deci a lui E^* este zero.

49. Fie μ o măsură pozitivă pe o σ — algebră $\mathfrak{M}$ în mulțimea Ω astfel ca $\mu(\Omega) = 1$. Dacă f este o funcție reală integrabilă Lebesgue, dacă $a < f(x) < b$, $(\forall)\, x \in \Omega$ și φ este convexă pe (a, b) atunci

$$\varphi\left(\int_\Omega f\,d\mu\right) \leqslant \int_\Omega (\varphi_0 f)\,d\mu$$

(Teorema lui Jensen).

R: Să punem $t = \int_\Omega f\,d\mu, \quad a < t < b$

Dacă

$$\beta = \sup_{a<s<t} \frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s}$$

$$\beta \leqslant \frac{\varphi(u) - \varphi(t)}{u - t}, \quad (\forall) u \in (t, b)$$

Rezultă că:

$$\varphi(u) \geqslant \varphi(t) + \beta(u - t), \quad a < t < u < b$$

Deci:

$$\varphi(f(x)) - \varphi(t) - \beta(f(t) - t) \geqslant 0, \quad (\forall)\, x \in \Omega$$

Deoarece φ este continuă și f este măsurabilă φ_0 f este măsurabilă.

Integrînd în ambii membrii:

$$\int_\Omega (\varphi_0 f)\,d\mu - \int_\Omega \varphi(t)\,d\mu - \beta \int_\Omega (f(x) - t)\,d\mu \geqslant 0$$

Observație. Luînd $\varphi(x) = e^x \to e^{\int_\Omega f d\mu} \leqslant \int_\Omega e^f\,d\mu$.

Dacă luăm $\Omega: \{p_1, ..., p_n\}$ cu $(p_i) = \frac{1}{n}$; $f(p_i) = x_i$

$$\exp\left\{\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}\right\} \leqslant \frac{e^{X_1} + ... + e^{X_n}}{n}.$$

Deci

$$\sqrt[n]{y_1 ..., y_n} \leqslant \frac{y_1 + ... + y_n}{n}.$$

Dacă luăm $\mu(p_i) = \alpha_i > 0$ cu $\Sigma\alpha_i = 1$ avem:

$$\exp(\alpha_1 X_1 + ... + \alpha_n X_n) \leqslant \alpha_1 e^{X_1} + ... + \alpha_n e^{X_n}$$

și luînd $e^{X_i} = y_i$

$$y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} ... y_n^{\alpha_n} \leqslant \alpha_1 y_1 + ... + \alpha_n y_n.$$

Fie p și q, $p \in (1, \infty)$ și $q \in (1, \infty)$ astfel ca $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

50. Fie X un spațiu măsură cu măsura μ. Fie f și g funcții măsurabile pe X cu valori în $[0, \infty]$. Atunci

a) $$\int_X fg\,d\mu \leqslant \left(\int_X f^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X g^q\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

și

b) $$\left(\int_X (f+g)^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_X f^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X g^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

(Inegalitățile lui Hölder și Minkovski)

R: Fie

$$F = \frac{f}{A}, \quad G = \frac{g}{B}; \quad A = \left(\int_X f^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$B = \left(\int_X g^q\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}}, \quad \int_X F^p\,d\mu = \int_X G^q\,d\mu = 1.$$

Dacă $x \in X$ este astfel ca $0 < F(X) < \infty$ și $0 < G(X) < \infty$ există numerele reale s și t astfel ca $F = e^{s/p}$, $G = e^{t/q}$.

Deoarece exponențiala este o funcție convexă aplicînd problema

$$e^{s/p + t/q} \leqslant \frac{e^s}{p} + \frac{e^t}{q}$$

deci

$$F(X)\,G(X) \leqslant \frac{(F(X))^p}{p} + \frac{(G(X))^q}{q}.$$

Integrînd obținem:

$$\int_X FG\, d\mu \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leqslant 1.$$

Pentru a stabili b) scriem

$$(f + g)^p = f(f + g)^{p-1} + g(f + g)^{p-1}.$$

Din a) rezultă

$$\int_X f(f + g)^{p-1}\, d\mu = \left(\int_X f^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X (f + g)^{(p-1)q}\, d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\int_X g(f + g)^{p-1}\, d\mu = \left(\int_X g^p\, d\mu)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X (f + g)^{(p-1)q}\, d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

Prin adunare rezultă b).

CAPITOLUL IX

INTEGRALE CURBILINII. APLICAȚII

1. Să se calculeze integrala curbilinie

$$I = \int_L \frac{dy}{(x+y)(x^2+y+1)}$$

pe arcul de parabolă (L), $y = x^2$ din primul cadran.

R: Pe arcul (L) avem $y = x^2$, $dy = 2x\,dx$, $x \in (0, \infty)$; înlocuind aceste elemente în I, obținem

$$I = \int_0^\infty \frac{2x\,dx}{(x+x^2)(2x^2+1)} = 2\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)(2x^2+1)}$$

integrala are sens, deoarece numitorul nu se anulează pe $[0, \infty)$, iar gradul numitorului întrece cu 3 unități gradul numărătorului.

Avem

$$\frac{1}{(1+x)(2x^2+1)} = \frac{A}{1+x} + \frac{Bx+C}{2x^2+1}$$

cu $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{2}{3}$, $C = 1 - A = \frac{2}{3}$, deci

$$I = \frac{2}{3}\int_0^\infty \frac{dx}{1-x} - \frac{4}{3}\int_0^\infty \frac{x-1}{2x^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{2}{3}\ln(1+x)\Big|_0^\infty - \frac{1}{3}\ln(2x^2+1)\Big|_0^\infty + \frac{4}{3}\int_0^\infty \frac{dx}{2x^2+1}$$

$$I = \frac{2}{3}\ln\frac{1+x}{\sqrt{2x^2+1}}\Big|_0^\infty + \frac{2}{3}\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\sqrt{2}\,x\Big|_0^\infty = \frac{\sqrt{2}}{3}\pi.$$

2. Să se calculeze integrala curbilinie

$$I = \int_L \frac{dy}{x(1+x)\sqrt{1+x+y}}$$

unde L este arcul din primul cadran al parabolei $y = 4x^2$.

R: O reprezentare parametrică a arcului L este

$$x = t, \quad y = 4t^2, \quad t \in [0, \infty).$$

Obţinem

$$I = \int_0^\infty \frac{8t\,dt}{t(1+t)\sqrt{1+t+4t^2}} = 8\int_0^\infty \frac{dt}{(t+1)\sqrt{1+t+4t^2}}.$$

Integrala are sens, deoarece

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^\alpha}{(1+t)\sqrt{1+t+4t^2}} = \frac{1}{2} \text{ pentru } \alpha = \frac{3}{2}$$

şi integrantul este mărginit pe $[0, \infty]$.

Facem substituţia

$$\sqrt{1+t+4t^2} = u + 2t,$$

sau

$$1 + t + 4t^2 = u^2 + 4tu + 4t^2, \quad t = \frac{u^2-1}{1-4u},$$

care transformă $[0, \infty)$ în $\left[1, \frac{1}{4}\right)$. Avem şi

$$dt = \frac{2u(1-4u) + 4(u^2-1)}{(1-4u)^2}\,du = \frac{-4u^2+2u-4}{(1-4u)^2}\,du$$

$$\sqrt{1+t+4t^2} = u + 2\frac{u^2-1}{1-4u} = \frac{-2u^2+u-2}{1-4u}, \text{ de unde}$$

$$I = 8\int_1^{\frac{1}{4}} \frac{1-4u}{u^2-4u} \cdot \frac{1-4u}{-2u^2+u-2} \cdot \frac{-4u^2+2u-4}{(1-4u)^2}\,du$$

sau

$$I = -16\int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{du}{u(u-4)}$$

$$\frac{1}{u(u-4)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u-4} \quad \text{cu } A = -\frac{1}{4}, \quad B = \frac{1}{4}$$

deci

$$I = -16\int_{\frac{1}{4}}^1 \left(-\frac{1}{4}\,\frac{1}{u} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{u-4}\right)du$$

$$I = 4\ln|u|\Big|_{\frac{1}{4}}^1 - 4\ln|u-4|\Big|_{\frac{1}{4}}^1 = 8\ln 15.$$

3. Să se calculeze integrala curbilinie

$$I = \int_{AB} \frac{dx}{x\sqrt{x+y}}$$

unde AB este arcul de curbă $x = 1 + t$, $y = t^2$, $t \in [1, \infty)$.

R: Pe arcul AB avem $dx = dt$, $x = 1 + t$, $y = t^2$, deci:

$$I = \int_1^\infty \frac{dt}{(1+t)\sqrt{1+t+t^2}}.$$

Integrala are sens, deoarece

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^\alpha}{(1+t)\sqrt{1+t+t^2}} = 1, \quad \text{pentru } \alpha = 2,$$

iar pe $[1, \infty)$ numitorul nu se anulează. Dacă punem

$$\sqrt{1+t+t^2} = t + u, \quad 1 + t + t^2 = t^2 + 2tu + u^2$$

rezultă

$$t = \frac{u^2-1}{1-2u}, \quad dt = \frac{-2u^2+2u-2}{(1-2u)^2}\,du,$$

$$\sqrt{1+t+t^2} = \frac{u^2-1}{1-2u} + u = \frac{-u^2+u-1}{1-2u}, \quad 1 + t = \frac{u^2-2u}{1-2u}$$

iar $[1, \infty)$ se transformă în $\left[\sqrt{3}-1, \frac{1}{2}\right)$. Obținem

$$I = \int_{\sqrt{3}-1}^{\frac{1}{2}} \frac{1-2u}{u^2-2u} \cdot \frac{1-2u}{-u^2+u-1} \frac{-2u^2+2u-2}{(1-2u)^2}\,du = 2\int_{\sqrt{3}-1}^{\frac{1}{2}} \frac{du}{u(u-2)}$$

Avem însă

$$\frac{1}{u(u-2)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u-2}, \quad A = -\frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{2}$$

deci

$$I = -\int_{\sqrt{3}-1}^{\frac{1}{2}} \frac{du}{u} + \int_{\sqrt{3}-1}^{\frac{1}{2}} \frac{du}{u-2} = \ln\frac{u-2}{u}\Big|_{\sqrt{3}-1}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln 3.$$

4. Să se calculeze integrala curbilinie

$$I = \int_{AB} \frac{dx + dy}{\sqrt{1+x+y^2}}$$

arcul AB fiind definit de $x = t^2$, $y = t$, $t \in [0, 1]$.

R: Pe AB avem $dx = 2t\,dt$, $dy = dt$, deci

$$I = \int_0^1 \frac{1+2t}{\sqrt{1+2t^2}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(2t^2)}{\sqrt{1+2t^2}} + \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+2t^2}} =$$

$$= \sqrt{1+2t^2}\Big|_0^1 +$$

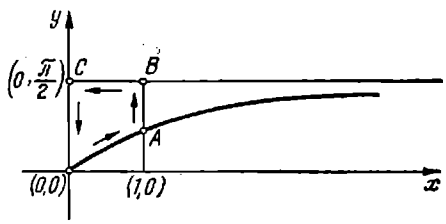

Fig. 16

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left(\sqrt{2}t + \sqrt{1+2t^2}\right)\Big|_0^1 = \sqrt{3} - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right).$$

5. Să se calculeze

$$\int_C y\,dx + x^2\,dy\,.$$

unde curba C este formată din dreptele $x = 0$, $x = 1$, imaginea drumului $x = t\sqrt{t}$; $y = \operatorname{arctg}\sqrt{t}$, $t \in [0, \infty)$ și asimptota lui (figura 16), $0 \leqslant x \leqslant 1$.

R: Considerăm drumul: $x = t\sqrt{t}$; $y = \operatorname{arctg}\sqrt{t}$; observăm că pentru $t \to \infty$, $x \to \infty$, $y \to \frac{\pi}{2}$, deci $y = \frac{\pi}{2}$ este o asimptotă orizontală.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{1}{(1+t)\,2\sqrt{t}\left(t + \frac{t}{2\sqrt{t}}\right)} = \frac{1}{3(1+t)} > 0$$

funcția este strict crescătoare.

Conturul de integrare este indicat în figura 16.

Avem

$$\int_C y\,dx + x^2\,dy = \int_{\overline{OA}} y\,dx + x^2\,dy + \int_{\overline{AB}} y\,dx + x^2\,dy +$$

$$+ \int_{\overline{BC}} y\,dx + x^2\,dy + \int_{\overline{CO}} y\,dx + x^2\,dy$$

însă

$$\overline{OA}: \begin{cases} x = t\sqrt{t}, & dx = \frac{3}{2}\sqrt{t}\,dt \\ y = \operatorname{arctg}\sqrt{t}, & dy = \frac{1}{2\sqrt{t}\,(t+1)}\,dt; \quad t \in [0, 1] \end{cases}$$

$$\overline{AB}: \begin{cases} x = 1; & dx = 0 \\ y = t, & dy = dt; \quad t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

$$\overline{BC}: \begin{cases} x = t, & dx = dt \\ y = \frac{\pi}{2}, & dy = 0; \quad t \in [0, 1] \end{cases}$$

$$\overline{CO}: \begin{cases} x = 0, & dx = 0 \\ y = t, & dy = dt; \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

deci:

$$\int_C y\,dx + x^2\,dy = \int_0^1 \left(\frac{3}{2}\sqrt{t}\operatorname{arctg}\sqrt{t} + \frac{t^2\sqrt{t}}{2(t+1)}\right)dt +$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dt + \frac{\pi}{2}\int_1^0 dt = \int_0^1 \left(3u^2 \operatorname{arctg} u + \frac{u^6}{(u^2+1)}\right)du +$$

$$+ \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4} + u^3 \operatorname{arctg} u \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{u^3}{u^2+1}\,du +$$

$$+ \left(\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + u\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{du}{u^2+1} =$$

$$- \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - \frac{u^2}{2}\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\ln(u^2+1)\Big|_0^1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + 1 -$$

$$- \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{11}{30} + \ln\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}.$$

6. Să se calculeze integrala curbilinie

$$I = \int_{AB} \frac{dx + 2\,dy}{x + y + 1}$$

unde AB este arcul de elipsă $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $A(1, 0)$, $B(0, 2)$.

R: O reprezentare parametrică a arcului AB este $x = \cos\theta$, $y = 2\cos\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$. Avem şi $dx = -\sin\theta\,d\theta$ $dy = 2\cos\theta\,d\theta$, deci

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin\theta + 4\cos\theta}{\cos\theta + 2\sin\theta + 1}\,d\theta.$$

Să punem $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = u$, obţinem $\sin\theta = \frac{2u}{1+u^2}$, $\cos\theta = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, $d\theta = \frac{2\,du}{1+u^2}$, iar $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ se transformă în $[0, 1]$.

$$I = 2\int_0^1 \frac{-\frac{2u}{1+u^2} + 4\frac{1-u^2}{1+u^2}}{\frac{1-u^2}{1+u^2} + \frac{4u}{1+u^2} + 1} \cdot \frac{du}{1+u^2}$$

$$I = -2\int_0^1 \frac{2u^2+u-2}{2u+1} \cdot \frac{du}{1+u^2}.$$

Putem scrie

$$\frac{2u^2+u-2}{(2u+1)(1+u^2)} = \frac{A}{2u+1} + \frac{Bu+C}{1+u^2},$$

$$A = -\frac{8}{3}, \quad B = \frac{7}{3}, \quad C = -\frac{13}{3};$$

deci

$$I = \frac{16}{3}\int_0^1 \frac{du}{2u+1} - \frac{14}{3}\int_0^1 \frac{u\,du}{1+u^2} + \frac{26}{3}\int_0^1 \frac{du}{1+u^2} =$$

$$= \frac{8}{3}\ln(2u+1)\Big|_0^1 - \frac{7}{3}\ln(1+u^2)\Big|_0^1 + \frac{26}{3}\operatorname{arctg} u\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{8}{3}\ln 3 - \frac{7}{3}\ln 2 + \frac{13\pi}{6}.$$

7. Să se calculeze

$$\int_\Gamma y^2\,dx + z^2\,dy + x^2\,dz$$

unde Γ este curba de intersecţie a elipsoidului $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ cu conul $z = c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$, $c > 0$.

R: Curba de intersecţie este o elipsă situată în planul $z = \frac{c}{\sqrt{2}}$ (acest fapt se obţine eliminînd $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ între cele două ecuaţii).

Ecuaţia elipsei este

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}.$$

Căutăm o reprezentare parametrică

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}}\cos t; \quad y = \frac{b}{\sqrt{2}}\sin t; \quad z = \frac{c}{\sqrt{2}};$$

$$dx = -\frac{a}{\sqrt{2}}\sin t; \quad dy = \frac{b}{\sqrt{2}}\cos t; \quad dz = 0, \quad t \in [0, 2\pi]$$

obţinem

$$I = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} (c^2 b \cos t - ab^2 \sin^3 t)\, dt = 0.$$

8. Să se arate că integrala curbilinie

$$\int_{\widehat{AB}} \left(x^2 - yz + \frac{y}{x^2+y^2}\right) dx + \left(y^2 - zx - \frac{x}{x^2+y^2}\right) dy + (z^2 - xy)\, dz$$

nu depinde de drum într-un domeniu simplu conex care nu conţine originea. Să se calculeze pentru $A(1, 1, 1)$, $B = (2, 2, 3)$.

R: Dacă notăm

$$P(x, y, z) = x^2 - yz + \frac{y}{x^2+y^2},$$

$$Q(x, y, z) = y^2 - zx - \frac{x}{x^2+y^2},$$

$$R(x, y, z) = z^2 - xy,$$

observăm că într-un domeniu care nu conţine originea, P, Q, R sînt continue şi au derivate parţiale de ordinul întîi continue. În plus, avem

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z},$$

şi, dacă D este simplu conex, aceste condiţii sînt suficiente pentru ca integrala să nu depindă de drum. Pentru a obţine integrala din enunţ, este suficient să integrăm pe drumul din figura 17. Avem

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

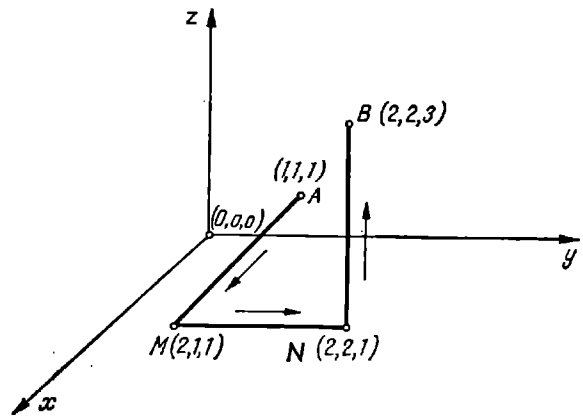

Fig. 17

unde

$$I_1 = \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2+1}\right) dx = \operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg} 1$$

$$I_2 = \int_1^2 \left(y^2 - 2 - \frac{2}{y^2+4}\right) dy = \left[\frac{1}{3}y^3 - 2y - \operatorname{arctg}\frac{y}{2}\right]_1^2 =$$

$$= \frac{7}{3} - 2 - \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg}\frac{1}{2},$$

$$I_3 = \int_1^3 (t^2 - 4)\, dt = \frac{1}{3}t^3 - 4t\Big|_1^3 = \frac{26}{3} - 8.$$

$$I = \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg}\frac{1}{2} - 2\operatorname{arctg} 1 + 1 = 1$$

9. Să se arate că drumul

$$d:\ x = f(t);\quad y = f(t);\quad t \in [0, 1]$$

$$f(t) = \begin{cases} (1-t)\left|\sin\dfrac{\pi}{2(1-t)}\right|, & t \in [0, 1) \\ 0, & t = 1 \end{cases}$$

nu este rectificabil.

R: Alegem punctele diviziunii Δ astfel:

$$\Delta:\ t = 0 < \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \ldots < 1 - \frac{1}{2k} < 1 - \frac{1}{2k+1} < 1$$

$$l_\Delta = \sqrt{\sum_{i=0}^{2k} (x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} =$$

$$= \sqrt{2} \sum_{i=0}^{2k} \left| (1 - t_{i+1}) \sin\frac{\pi}{2(1-t_{i+1})} - (1 - t_i) \sin\frac{\pi}{2(1-t_i)} \right| =$$

$$= \sqrt{2}\left(\left| 1 - \frac{1}{2} \right) \sin\pi - (1-0)\sin\frac{\pi}{2} \right| +$$

$$+ \left| \left(1 - \frac{2}{3}\right)\sin\frac{3\pi}{2} - \left(1 - \frac{1}{2}\right)\sin\pi \right| +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \left| \frac{1}{2k+1}\sin\frac{(2k+1)\pi}{2} - \frac{1}{2k}\sin k\pi \right| \Big) =$$

$$= \sqrt{2}\left[1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2k+1}\right];$$

dar

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2k+1}\right)=+\infty$$

deci

$$\lim_{k\to\infty} l_\Delta = +\infty\,.$$

Explicația este dată de faptul că integrala lui ds, anume $\sqrt{2}\sqrt{f'^2(t)}$ nu este cu variație mărginită pe $[0, 1)$.

10. Să se calculeze lungimea arcului

$$x=\ln(1+t^2);\quad y=t-2\operatorname{arctg} t,\quad t\in(-\infty,\ +\infty)$$

între punctele $M\left(\ln 2,\ 1-\frac{\pi}{2}\right)$ și $N\left(\ln 2,\ \frac{\pi}{2}-1\right)$ (se va lua arcul ce trece prin origine).

R: $L=\int_{\widehat{MN}} ds$

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2+\left(1-\frac{2}{1+t^2}\right)^2}\,dt$$

$$ds=\sqrt{\frac{4t^2+4}{(1+t^2)^2}-\frac{4}{1+t^2}+1}\,dt=dt$$

deci

$$L=\int_{t_2}^{t_1} dt=2.$$

Punctul M corespunde valorii $t=1$, iar N valorii $t_2=-1$.

11. Se dă curba definită de

$$x\sin\varphi+y\cos\varphi=f'(\varphi),$$
$$x\cos\varphi-y\sin\varphi=f''(\varphi),$$

cu $f\in C^{(3)}$, $\varphi\in[0, 1]$. Să i se calculeze lungimea.

R: Avem

$$x=f'(\varphi)\sin\varphi+f''(\varphi)\cos\varphi,$$
$$y=f'(\varphi)\cos\varphi-f''(\varphi)\sin\varphi,\quad \varphi\in[0, 1].$$
$$ds^2=dx^2+dy^2=[f''(\varphi)\sin\varphi+f'(\varphi)\cos\varphi+f'''(\varphi)\cos\varphi-$$
$$-f''(\varphi)\sin\varphi]^2\,dy^2+[f''(\varphi)\cos\varphi-f'(\varphi)\sin\varphi-$$
$$-f'''(\varphi)\sin\varphi-f''(\varphi)\cos\varphi]^2\,d\varphi^2$$

sau

$$ds^2=[f'^2(\varphi)+2f'(\varphi)\,f'''(\varphi)+f'''^2(\varphi)]\,d\varphi^2,$$
$$ds^2=[f^2(\varphi)+f'''(\varphi)]^2\,d\varphi^2$$

deci

$$s = \int_0^1 [f'(\varphi) + f'''(\varphi)]\, d\varphi =$$

$$= f(1) - f(0) + f''(1) - f''(0).$$

12. Să se afle lungimea elipsei de semiaxe a, b, $a > b$.

R: Avem $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \in [0, 2\pi)$,

deci

$$ds = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\, dt$$

dacă introducem excentricitatea $e = \frac{c}{a} \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, avem

$$ds = a\sqrt{\sin^2 t + \frac{b^2}{a^2}\cos^2 t}\, dt = a\sqrt{1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)\cos^2 t}$$

$$dt = a\sqrt{1 - e^2\cos^2 t}\, dt$$

şi

$$s = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2\cos^2 t}\, dt = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2\sin^2 t}\, dt,$$

deoarece $e < 1$, putem scrie

$$(1 - e^2\sin^2 t)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}e^2\sin^2 t - \frac{1}{2^2}\frac{1}{2!}e^4\sin^4 t -$$

$$- \frac{1}{2^3}\frac{1\cdot 3}{3!}e^6\sin^6 t + \ldots$$

obţinem

$$s = 2a\pi\left[1 - \frac{e^2}{2^2} - \frac{1^2\cdot 3}{2^2\cdot 4^2}e^4 - \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}e^6 - \ldots\right].$$

13. Să se determine mulţimea în care expresia:

$$P\, dx + Q\, dy = \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x}\, dx + \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} + x}\, dy$$

este o diferenţială totală şi apoi funcţia a cărei diferenţială totală este.

R: Să determinăm mulţimea în care $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} + x}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = \frac{\sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}}}{2\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x}} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y \cdot \sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}}}{2|y|\sqrt{x^2 + y^2}}$$

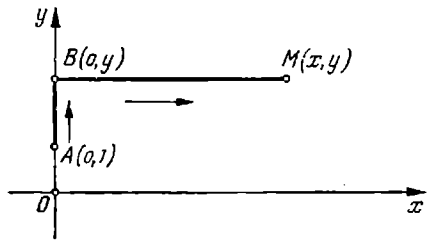

Fig. 18

pentru ca $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ trebuie ca $y>0$; obținem

$$F(x, y)=\int_{\widehat{AM}}\left(\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}-x}\,dx+\right.$$
$$\left.+\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}+x}\,dy\right)$$

conturul de integrare $\widehat{AM}$ este cel din figura 18.

$$F(x, y)=\int_1^y\sqrt{\sqrt{t^2+1}}\,dt+\int_0^x\sqrt{\sqrt{t^2+y^2}-t}\,dt=$$

$$=(t+1)^{3/2}\Big|_1^y+I\Big|_0^x=(y+1)^{3/2}-2\sqrt{2}+I\Big|_0^x$$

am notat

$$I=\int\sqrt{\sqrt{t^2+y^2}-t}\,dt.$$

Facem schimbarea de variabilă $t=y\operatorname{ctg}u$

$$\sqrt{t^2+y^2}=\frac{y}{\sin u};\quad \sqrt{\sqrt{t^2+y^2}-t}=\sqrt{y}\sqrt{\frac{1-\cos u}{\sin u}}=\sqrt{y}\sqrt{\operatorname{tg}\frac{u}{2}};$$

$$dt=-\frac{y}{\sin^2 u}du$$

$$I\to-y\sqrt{y}\int\sqrt{\operatorname{tg}\frac{u}{2}}\,\frac{du}{\sin^2 u}$$

Dacă punem $\operatorname{tg}\frac{u}{2}=v$; $\frac{u}{2}=\operatorname{arctg}v$;

$$du=\frac{2}{1+v^2}dv;\quad \sin u=\frac{2v}{1+v^2}$$

Cu aceasta

$$I\to-\frac{y}{2}\sqrt{y}\int\frac{\sqrt{v}\,(1+v^2)^2}{(1+v^2)\,v^2}dv=-\frac{y\sqrt{y}}{2}\int\frac{1+v^2}{v^{3/2}}dv=+y\sqrt{y}\,v^{-\frac{1}{2}}-$$

$$-\frac{1}{3}y\sqrt{y}\,v^{3/2}=y\sqrt{y}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{t^2+y^2}-t}{\sqrt{t^2+y^2}+t}}\right)^{-\frac{1}{2}}-$$

$$-\frac{1}{3}y\sqrt{y}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{t^2+y^2}-t}{\sqrt{t^2+y^2}+t}}\right)^{3/2}$$

luînd integrala între limitele $t = 0$ şi $t = x$, obţinem:

$$F(x, y) = (y + 1)^{3/2} + y\frac{2(\sqrt{x^2 + y^2} + 2x)}{3\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} + x}} - \frac{4}{3}y^{3/2} + C.$$

14. Fie $I = \int_\Gamma P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ unde P şi Q sînt funcţiile

$$P(x, y) = \frac{e^{-y}}{x^2 + y^2}(x \sin x - y \cos x),$$

$$Q(x, y) = \frac{e^{-y}}{x^2 + y^2}(x \cos x + y \sin x)$$

definite pe $R^2 - (0, 0)$.

1) Să se arate că $I = 0$ pe orice curbă închisă simplă rectificabilă ce nu înconjură originea.

b) Se alege pentru Γ semicercul C de centru O şi rază R situat în semiplanul $y \geqslant 0$. Să se arate că:

$$I = \int_0^\pi e^{-R \sin \theta} \cos(R \cos \theta)\,d\theta$$

şi $I \to 0$ cînd $R \to \infty$ şi $I \to \pi$ cînd $R \to 0$.

c) Se consideră conturul din figura 19.

Să se deducă din punctul precedent că:

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$$

este convergentă şi să se determine valoarea ei.

R: a) Pentru ca $I = 0$, pe orice curbă închisă simplă, rectificabilă care nu înconjură originea este necesar şi suficient ca pe $R^2 - (0, 0)$ simplu să avem $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$;

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{2x e^{-y}}{(x^2 + y^2)^2}(x \cos x + y \sin x) + \frac{e^{-y}}{x^2 + y^2}(\cos x + y \cos x - x \sin x)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \left(\frac{-e^{-y}}{x^2 + y^2} - \frac{2y e^{-y}}{(x^2 + y^2)^2}\right)(x \sin x - y \cos x) - \frac{e^{-y}}{x^2 + y^2}\cos x$$

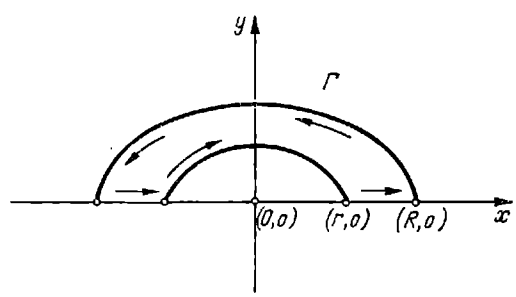

Fig. 19

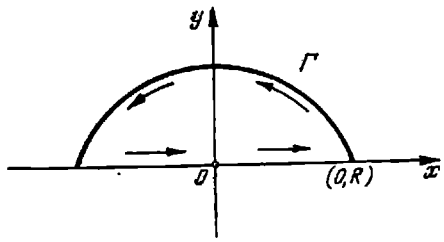

Fig. 20

deci:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} =$$

$$= \frac{-x^2 \cos x - 2xy \sin x + y^2 \cos x}{(x^2+y^2)^2} e^{-y} -$$

$$- \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}(x \sin x - y \cos x)$$

b) Pentru conturul din figura 20 alegem reprezentarea $x = R\cos\theta$, $y = R\sin\theta$, $\theta \in [0, \pi]$. Integrala devine

$$I = \int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta} \cos(R\cos\theta)\, d\theta.$$

$$\lim_{R\to\infty} I = 0 \quad \text{şi} \quad \lim_{R\to 0} I = \pi.$$

c) Considerînd conturul închis din figura 19 putem scrie

$$\int_{\gamma} f(\theta)\, d\theta + \int_{-R}^{-r} f(\theta)\, d\theta + \int_{\Gamma} f(\theta)\, d\theta + \int_{r}^{R} f(\theta)\, d\theta) = 0$$

ar:

$$\lim_{r\to 0} \int \quad = -\pi \quad \text{şi} \quad \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma} = 0,$$

deci pentru $r \to 0$ **şi** $R \to \infty$, **obţinem**

$$\int_{-\infty}^{0} f(\theta)\, d\theta + \int_{0}^{\infty} f(\theta)\, d\theta = \pi$$

dar: $P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$ **pentru** $y = 0$ **devine:** $P(x, 0)\, dx = \frac{\sin x}{x}$ **obţinem astfel:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$$

sau încă:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

15. Să se calculeze

$$\int_{\Gamma} \bar{F}\, d\bar{r} = \int_{\Gamma} xyz(x\, dx + y\, dy + z\, dz); \quad \bar{F}(r) = \vec{i}x^2yz + \vec{j}xy^2z + \vec{k}xyz^2$$

unde Γ **este curba închisă din planul** $x = 1$, **definită de** $y^2 + z^2 = 1$, $z + y = 0$, $z - y = 0$, $z \geqslant 0$, **parcursă în sens direct faţă de direcţia pozitivă a axei** Ox.

R: Γ este reprezentată în figura 21

$$\int_\Gamma \bar{F}\,d\bar{r} = \int_{\overline{AB}} \bar{F}\,d\bar{r} + \int_{\widehat{BC}} \bar{F}\,d\bar{r} + \int_{\overline{CA}} \bar{F}\,d\bar{r}.$$

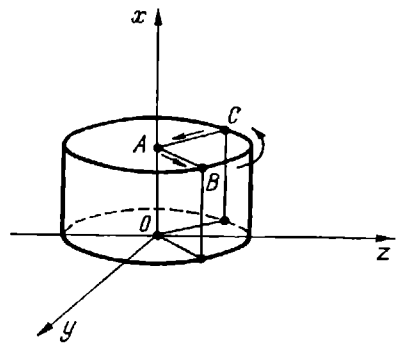

Fig. 21

Pe $\widehat{BC}$:

$x = 1, \quad y = \cos\theta, \quad z = \sin\theta, \quad \theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$

deci

$$\int_{\widehat{BC}} \bar{F}\,d\bar{r} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin\theta\cos\theta\,(-\sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta)\,d\theta = 0$$

pe $\overline{AB}$: $x = 1;\ y = z;\ dy = dz;\ y \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

$$\int_{\overline{AB}} \bar{F}\,d\bar{r} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2y^3\,dy = 2\frac{y^4}{4}\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{8};$$

Pe $\overline{CA}$: $x = 1;\ z = -y;\ dz = -dy,\ y \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right]$

$$\int_{\overline{CA}} \bar{F}\,d\bar{r} = -\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} 2y^3\,dy = -2\frac{y^4}{4}\Big|_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} = \frac{1}{8};$$

obţinem:

$$I = \int_\Gamma \bar{F}\,d\bar{r} = \frac{1}{4}.$$

16. Să se calculeze cu integrala curbilinie aria mărginită de prima buclă a cicloidei

$$x = a(t - \sin t); \quad y = a(1 - \cos t),$$

şi axa Ox.

R: Prima buclă a cicloidei se obţine pentru $t \in [0, 2\pi]$.

$A = \frac{1}{2}\int_C x\,dy - y\,dx$ unde C este conturul din figura 22.

Avem $\int_{\overline{OA}} = 0$; în continuare

$$\int_{\widehat{AmO}} x\,dy - y\,dx = \int_{2\pi}^{0} [a^2\sin t(t - \sin t) - a^2(1 - \cos t)^2]\,dt =$$

$$= a^2\int_{2\pi}^{0} (t\sin t - 2 + 2\cos t)\,dt = 6\pi a^2$$

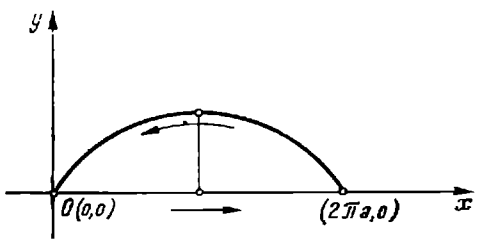

Fig. 22

urmează că $A = 3\pi a^2$.

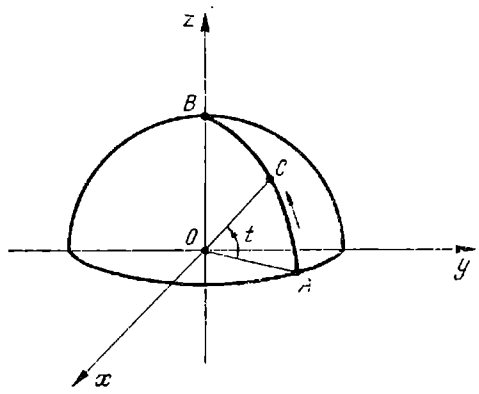

Fig. 23

17. Să se calculeze $\int_C (x+y)\,ds$ unde C este sfertul de cerc $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x=y$ din primul octant.

R: Căutăm o reprezentare parametrică a conturului din figura 23

$$2x^2+z^2=R^2$$

$$x=\frac{R\cos t}{\sqrt{2}},\quad y=\frac{R\cos t}{\sqrt{2}}$$

$$z=R\sin t,\quad t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=\sqrt{R^2\cos^2 t+R^2\sin^2 t}\,dt=R\,dt$$

$$\int_C (x+y)\,ds=R^2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt=R^2\sqrt{2}.$$

18. Să se determine aria figurii mărginită de un arc al epicicloidei:

$$\begin{cases} x=a[(1+m)\cos mt-m\cos(1+m)t] \\ y=a[(1+m)\sin mt-m\sin(1+m)t] \end{cases}$$

şi de partea corespunzătoare din cerc (figura 24).

R: Din figură rezultă că

$$A=\frac{1}{2}\int_C (x\,dy-y\,dx)=\frac{1}{2}\left(\int_{\widehat{ABC}}(x\,dy-y\,dx)+\int_{\widehat{CDA}}(x\,dy-y\,dx)\right);$$

pe $\widehat{ABC}$: $x=a[(1+m)\cos mt-m\cos(m+1)t]$, $t\in[0,2\pi]$

$y=a[(1+m)\sin mt-m\sin(m+1)t]$,

$dx=a[-m(1+m)\sin mt+m(m+1)\sin(m+1)t]$,

$dy=a[m(1+m)\cos mt-m(m+1)\cos(m+1)t]$

$$x\,dy-y\,dx=a^2m(1+m)(1+2m)(1-\cos t)\,dt$$

$$\frac{1}{2}\int_{\widehat{ABC}}(x\,dy-y\,dx)=\pi a^2m(1+m)(1+2m)$$

pe $\widehat{CDA}$: $x=a\cos mt$, $y=a\sin mt$, $t\in[2\pi,0]$.

$$\frac{1}{2}\int_{\widehat{CDA}}x\,dy-y\,dx=\frac{1}{2}a^2m\int_{2\pi}^{0}dt=-\pi a^2m$$

deci $A=\pi a^2m^2(2m+3)$.

Obs.: Am luat pe $t\in[0,2\pi]$ deoarece pe epicicloidă $x^2+y^2=a^2[(1+m)^2+m^2-2m(1+m)\cos t]$ şi deci intersecţia cu cercul $x^2+y^2=a^2$ se face pentru $t=0,\ 2\pi,\ 4\pi,\ \ldots$

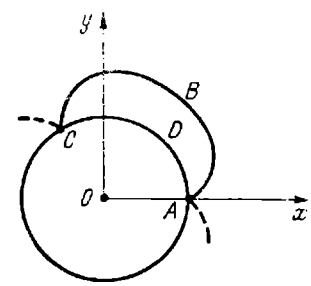

Fig. 24

19. Să se determine aria mărginită de curba de ecuaţie:

$$(x + y)^{2n+1} = ax^n y^n (n \in N).$$

R: Alegem reprezentarea de forma: $y = tx$

$$x^{2n+1}(1 + t)^{2n+1} = ax^{2n}t^n, \quad x = \frac{at^n}{(1 + t)^{2n+1}};$$

$$y = \frac{at^{n+1}}{(1 + t)^{2n+1}}; \quad t \in [0, \infty)$$

(egalitatea $x_1 = x_2$ şi $y_1 = y_2$ are loc numai pentru $t_1 = 0$ şi $t_2 = \infty$);

$$x\,dy - y\,dx = a^2 \frac{t^{2n}}{(1 + t)^{4n+2}}\,dt$$

$$A = \frac{a^2}{2}\int_0^\infty \frac{t^{2n}}{(1 + t)^{4n+2}}\,dt \cdot$$

Pentru calculul integralei folosim o descompunere de forma:

$$t^{2n} = [(1 + t) - 1]^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k (-1)^k (1 + t)^k$$

$$A = \frac{a^2}{2}\sum_{k=0}^{2n}\int_0^\infty C_{2n}^k (-1)^k (1 + t)^{k-4n-2}\,dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k (-1)^k \frac{(1 + t)^{-4n-1+k}}{k - 4n - 1}\Bigg|_0^\infty = \frac{a^2}{2}\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k C_{2n}^k \frac{1}{4n + 1 - k} \cdot$$

20. Se dă o forţă variabilă $\bar{F}(x, y, z)$, avînd mărimea invers proporţională cu distanţa de la punctul ei de aplicaţie la axa Oz, dirijată după perpendiculara pe această axă şi îndreptată spre ea. Să se determine lucrul mecanic efectuat prin deplasarea punctului sub acţiunea acestei forţe pe cercul $x = \cos t$, $y = 1$, $z = \sin t$ din punctul $M(1, 1, 0)$ la $N(0, 1, 1)$ în sens direct faţă de direcţia pozitivă a axei Oy.

R: $F = \frac{h}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. În figura 25 se indică conturul.

Lucrul mecanic este dat de

$$I = \int_{\overset{\frown}{MN}} \bar{F}\,d\bar{r} = -$$

$$-\int_{\overset{\frown}{MN}} \frac{h}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{x\bar{i} + y\bar{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}} (\bar{i}\,dx +$$

$$+ \bar{j}\,dy + \bar{k}dz) = -h\int_{\overset{\frown}{MN}} \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2} =$$

$$= -\frac{h}{2}\ln(x^2 + y^2)\Big|_M^N = +\frac{h}{2}\ln 2$$

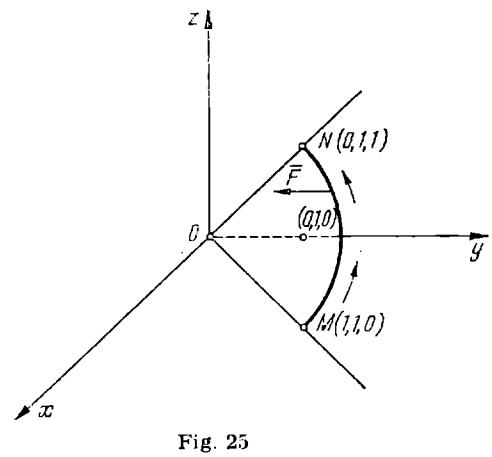

Fig. 25

21. Să se determine masa firului definit de

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

între punctele cu abscisele $x_1 = 0$ și $x_2 = a$, știind că densitatea este invers proporțională cu ordonata punctului iar în punctul $(0, a)$ este δ.

R: Masa firului este dată de:

$$M = \int_{\widehat{AB}} \rho \, ds, \quad \rho = \frac{k}{y}; \quad \delta = \frac{k}{a}; \quad k = a\delta$$

$$ds = \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)^2} \, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2} \, dx$$

$$ds = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) dx$$

$$M = a\delta \int_{AB} \frac{ds}{y} = \delta \int_0^a dx = \delta a$$

22. Să se calculeze volumul elipsoidului

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$$

folosim o integrală curbilinie.

R: Dacă îl tăiem cu un plan de cotă z obținem discul eliptic

$$\frac{c^2x^2}{a^2(c^2 - z^2)} + \frac{c^2y^2}{b^2(c^2 - z^2)} \leqslant 1$$

care are aria

$$S(z) = \pi \frac{ab(c^2 - z^2)}{c^2}, \quad |z| \leqslant |c|$$

Folosind formula

$$V = \int_{z_1}^{z_2} S(z) \, dz$$

obținem în cazul nostru

$$V = \pi \frac{ab}{c^2} \int (c^2 - z^2) \, dz = \frac{4}{3} \pi abc.$$

Dacă considerăm elipsoizii de rotație în jurul lui Ox, Oy și sfera de rază b, de volume respectiv

$$V' = \frac{4}{3} \pi ab^2, \quad (b = c),$$

$$V'' = \frac{4}{3} \pi ba^2, \quad (a = c),$$

$$V''' = \frac{4}{3} \pi b^3, \quad (a = b).$$

avem relația

$$V'^2 = V'' \cdot V'''.$$

23. Se dă conoidul generat de dreptele care se sprijină pe cercul $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$, pe dreapta $x = 0$, $z = h$ şi sînt paralele cu planul $y = 0$. Să se găsească volumul corpului mărginit de suprafaţa conoidului ($z \geqslant 0$) şi de planul xOy.

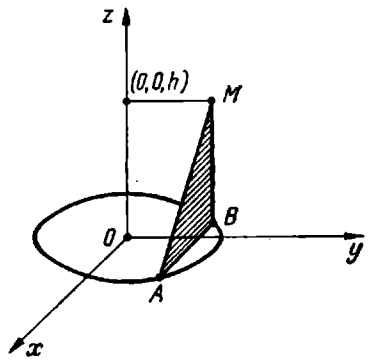

Fig. 26

R: Să găsim ecuaţia conoidului. O dreaptă variabilă paralelă cu planul $y = 0$ are ecuaţiile

$$y = \lambda, \quad x = \mu z + m.$$

Condiţia ca să se sprijine pe dreapta

$$x = 0, \quad z = h$$

ne dă legătura $m = -\mu h$. Condiţia ca să se sprijine pe cercul

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad z = 0$$

conduce la

$$\lambda^2 + \mu^2 h^2 = R^2$$

deci ecuaţia conoidului este

$$y^2 + \frac{h^2 x^2}{(z-h)^2} = R^2$$

sau

$$(y^2 - R^2)(z-h)^2 + h^2 x^2 = 0.$$

Dacă tăiem corpul cu planul $y = y_0$ obţinem triunghiul AMB (figura 26) a cărui arie este

$$h\sqrt{R^2 - y_0^2}$$

prin urmare volumul cerut este dat de

$$\vartheta = \int_{-R}^{R} h\sqrt{R^2 - y^2}\, dy = hR^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta = \frac{\pi h R^2}{2}$$

24. Să se calculeze momentul de inerţie al firului de densitate $\varphi(x, y, z) = xyz$, definit de

$$x = t, \quad y = \frac{4}{3} t^{\frac{3}{2}}, \quad z = t^2, \quad t \in [0, 1],$$

faţă de originea axelor (0. 0, 0).

R: Momentul de inerţie I_0 cerut este dat de integrala

$$I_0 = \int_0^1 \rho(x^2 + y^2 + z^2)\, ds$$

$$\rho = \frac{4}{3} t^{\frac{5}{2}}, \quad x^2 + y^2 + z^2 = t^2 + \frac{16}{9} t^3 + t^4,$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (1 + 4t + 4t^2)\, dt^2 = (1 + 2t)^2\, dt^2$$

deci $ds = (1 + 2t)dt$. Obţinem

$$I_0 = \frac{4}{3}\int_0^1 t^{\frac{9}{2}}\left(t^2 + \frac{16}{9}t^3 + t^4\right)(1 + 2t)\,dt =$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^1 t^{\frac{9}{2}}\left[t^2 + \left(\frac{16}{9} + 2\right)t^3 + \left(\frac{32}{9} + 1\right)t^4 + 2t^5\right]dt =$$

$$= \frac{4}{3}\left[\frac{9}{15} + \frac{34}{9}\cdot\frac{9}{17} + \frac{41}{9}\cdot\frac{9}{19} + \frac{9}{21}\cdot 2\right]$$

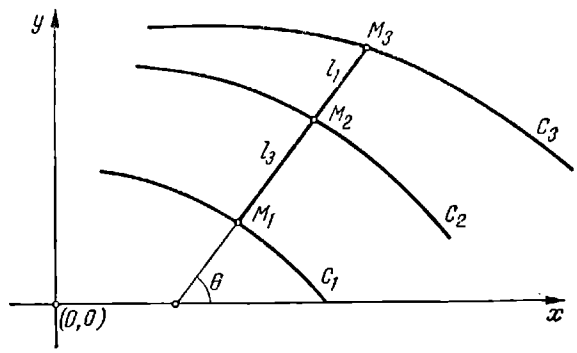

Fig. 27

25. Pe o bară rigidă M_1M_3 (figura 27) care se mişcă în planul xOy, fie un punct M_2 al ei şi să notăm

$$\overline{M_2M_3} = l_1, \quad \overline{M_3M_1} = l_2, \quad \overline{M_1M_2} = l_3$$

segmentele orientate $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_2M_3}$, $\overline{M_3M_1}$; avem $l_1 + l_2 + l_3 = 0$.

Să presupunem că punctele M_1, M_2, M_3, descriu curbele închise C_1, C_2, C_3, simple, fără puncte multiple care mărginesc domeniile de arie respectiv A_1, A_2, A_3. Să se arate că avem relaţia

$$A_1l_1 + A_2l_2 + A_3l_3 + \pi l_1l_2l_3 = 0.$$

R: Dacă M_i au coordonatele (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$ şi θ este unghiul pe care îl face M_1M_3 cu axa Ox, obţinem

$$x_1 = x_2 - l_3\cos\theta, \qquad y_1 = y_2 - l_3\sin\theta,$$
$$x_3 = x_2 + l_1\cos\theta, \qquad y_3 = y_2 + l_1\sin\theta,$$

şi

$$dA_1 = \frac{1}{2}(x_1\,dy_1 - y_1\,dx_1) =$$

$$= \frac{1}{2}(x_2 - l_3\cos\theta)(dy_2 - l_3\cos\theta\,d\theta) -$$

$$- \frac{1}{2}(y_2 - l_3\sin\theta)(dx_2 + l_3\sin\theta\,d\theta),$$

$$\mathrm{d}A_2 = \frac{1}{2}(x_2\,\mathrm{d}y_2 - y_2\,\mathrm{d}x_2),$$

$$\mathrm{d}A_3 = \frac{1}{2}(x_3\,\mathrm{d}y_3 - y_3\,\mathrm{d}x_3) = \frac{1}{2}(x_2 + l_1\cos\theta)(\mathrm{d}y_2 + l_1\cos\theta\,\mathrm{d}\theta) -$$

$$-\frac{1}{2}(y_2 + l_1\sin\theta)(\mathrm{d}x_2 - l_1\sin\theta\,\mathrm{d}\theta)$$

care ne dau imediat

$$l_1\,\mathrm{d}A_1 + l_2\,\mathrm{d}A_2 + l_3\,\mathrm{d}A_3 + \frac{1}{2}l_1l_2l_3\,\mathrm{d}\theta = 0$$

integrată cu $\theta\in[0, 2\pi)$ obținem relația din enunț.

Să presupunem $C_1 \equiv C_2$ deci $A_1 = A_2$; punctul M_2 descrie o arie $\mathcal{A}$ dată de relația

$$(l_1 + l_3)\,A + l_2\mathcal{A} + \pi l_1l_2l_3 = 0$$

sau

$$\mathcal{A} = A - \pi l_1l_3.$$

CAPITOLUL X

INTEGRALE DUBLE. INTEGRALE DE SUPRAFAȚĂ. APLICAȚII

1. Să se calculeze

$$I = \iint_D (|x| + |y|)\, dx\, dy$$

unde D este definit de $|x| + |y| \leqslant 1$.

R: Domeniul D este reuniunea $\bigcup D_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ cu

$$D_1 = \{(x, y) \mid x + y \leqslant 1, \quad x \in [0, 1], \quad y \in [0, 1]\}$$

$$D_2 = \{(x, y) \mid y - x \leqslant 1, \quad x \in [-1, 0], \quad y \in [0, 1]\}$$

$$D_3 = \{(x, y) \mid -x - y \leqslant 1, \quad x \in [-1, 0], \quad y \in [-1, 0]\}$$

$$D_4 = \{(x, y) \mid x - y \leqslant 1, \quad x \in [0, 1], \quad y \in [-1, 0]\}$$

avem $D_i \cap D_j = \varnothing$ în afara unei mulțimi de arie nulă care nu influențează valoarea integralei, deci

$$\mathcal{J} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x + y)\, dy + \int_{-1}^0 dx \int_0^{1+x} (y - x)\, dy +$$

$$+ \int_{-1}^0 dx \int_{-x-1}^0 (-x - y)\, dx + \int_0^1 dx \int_{x-1}^0 (x - y)\, dy =$$

$$= \int_0^1 \left(xy + \frac{1}{2} y^2\right)\Big|_0^{1-x} dx + \int_{-1}^0 \left(\frac{1}{2} y^2 - xy\right)\Big|_0^{1+x} dx +$$

$$+ \int_{-1}^0 \left(-xy - \frac{1}{2} y^2\right)\Big|_{-x-1}^0 dx + \int_0^1 \left(xy - \frac{1}{2} y^2\right)\Big|_{x-1}^0 dx = \frac{4}{3}.$$

2. Să se calculeze $\iint_D \frac{dx\, dy}{\sqrt{x}}$ unde D: $y^2 \leqslant 8x$, $y \leqslant 2x$; $y + 4x \leqslant 24$.

R: Domeniul D este haşurat în figura 28.

Pentru a calcula această integrală descompunem domeniul D în 3 subdomenii pentru care avem:

$$\iint_{D_1} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x}} = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x}} \int_{-\sqrt{8x}}^{2x} dy =$$

$$= \int_0^2 (2\sqrt{x} - 2\sqrt{2})\,dx =$$

$$-\frac{4}{3}\,2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = -\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

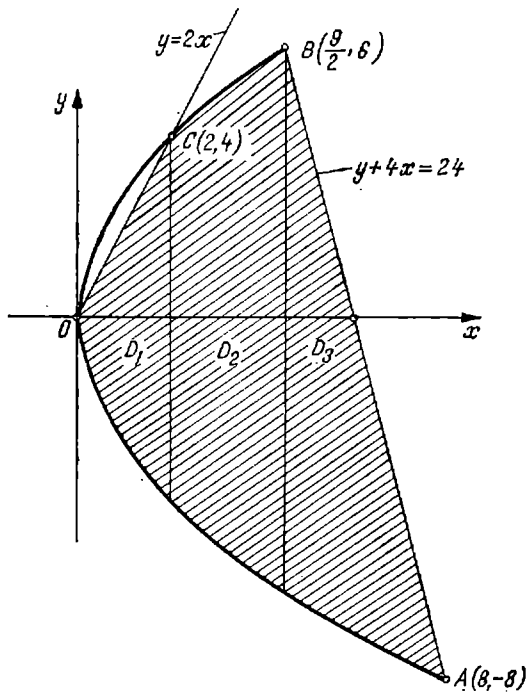

Fig. 28

și

$$\iint_{D_2} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x}} = \int_2^{\frac{9}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x}} \int_{-\sqrt{8x}}^{\sqrt{8x}} dy =$$

$$= 4\sqrt{2} \int_2^{\frac{9}{2}} dx = 10\sqrt{2}$$

avem și

$$\iint_{D_3} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x}} = \int_{\frac{9}{2}}^{8} \frac{dx}{\sqrt{x}} \int_{-\sqrt{8x}}^{24-4x} dy =$$

$$= \int_{\frac{9}{2}}^{8} \left(\frac{24}{\sqrt{x}} - 4\sqrt{x} + 2\sqrt{2}\right) dx = \left(48\sqrt{x} - \frac{8}{3}\,x\sqrt{x} + 2\sqrt{2}\,x\right)\Big|_{\frac{9}{2}}^{8} = \frac{19\sqrt{2}}{3}$$

deci $\iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{x}} = 15\sqrt{2}$.

3. Să se calculeze integrala dublă

$$\mathcal{J} = \iint_D \operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2)\,dx\,dy$$

unde D: $x^2 + y^2 \leqslant 4$.

R: Deoarece

$$\operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2) = \begin{cases} 1, & x^2 - y^2 + 2 > 0 \\ 0, & x^2 - y^2 + 2 = 0 \\ -1, & x^2 - y^2 + 2 < 0 \end{cases}$$

atunci

$$\mathcal{J} = \iint_{D_1} dx\,dy + \iint_{D_2} (-1)\,dx\,dy$$

unde

$$D_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 4;\quad x^2 - y^2 + 2 > 0\},$$

$$D_2 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 4;\quad x^2 - y^2 + 2 < 0\},\quad D_2 = D_2' \cup D_2''$$

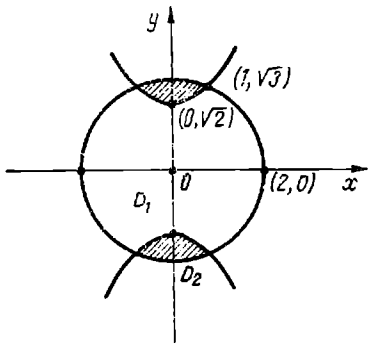

Fig. 29

însă

$$\mathcal{J}' = \iint_{x^2+y^2\leqslant 4} dx\, dy = 4\pi$$

deci

$$\mathcal{J} = 4\pi - 4\iint_{\mathcal{D}} dx\, dy$$

unde $\mathcal{D}$ (figura 29) este definit de $x^2 - y^2 + 2 < 0$, $x^2 + y^2 \leqslant 4$, deci

$$\iint_{\mathcal{D}} dx\, dy = \int_{-1}^{1} dx \int_{\sqrt{x^2+2}}^{\sqrt{4-x^2}} =$$

$$= \int_{-1}^{+1} (\sqrt{4 - x^2} - \sqrt{x^2 + 2}\, dx$$

Punem $x = 2 \sin t$, $dx = 2 \cos t\, dt$, $[-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ deci

$$\int_{-1}^{+1} \sqrt{4 - x^2}\, dx = 4\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t\, dt = 4\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1 + \cos 2t}{2}\, dt = \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}$$

$$\mathcal{J}'' = \int_{-1}^{+1} \sqrt{2 + x^2}\, dx = x\sqrt{2 + x^2}\Big|_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} \frac{x^2}{\sqrt{2 + x^2}}\, dx =$$

$$= x\sqrt{2 + x^2}\Big|_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} \sqrt{2 + x^2}\, dx + 2\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{2 + x^2}}$$

deci

$$\int_{-1}^{+1} \sqrt{2 + x^2}\, dx = \frac{1}{2}\, x\sqrt{2 + x^2}\Big|_{-1}^{+1} + \ln\left(x + \sqrt{2 + x^2}\right)\Big|_{-1}^{+1} =$$

$$= \sqrt{3} + \ln\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = \sqrt{3} + \ln(2 + \sqrt{3}),$$

încît obținem în final

$$\mathcal{J} = 4\pi - \frac{8\pi}{3} + 4\ln(2 + \sqrt{3}) = \frac{4\pi}{3} + 4\ln(2 + \sqrt{3}) \bullet$$

4. Să se calculeze

$$\iint_D (x^2 + y^2 - 4x - 4y + 10)\, dx\, dy$$

unde D este domeniul: $x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 13 \leqslant 0$.

R: Ecuația elipsei o scriem sub forma:

$$(x - 1)^2 + 4(y - 2)^2 \leqslant 4$$

sau:

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{1} \leqslant 1.$$

Luînd $x-1=2\rho\cos\theta;\quad y-2=\rho\sin\theta,$

$$dx\,dy=2\rho\,d\rho\,d\theta;\quad \rho\in[0,1];\quad \theta\in[0,2\pi]$$

$$\mathcal{J}=2\iint_{\Delta'}[(2\rho\cos\theta-1)^2+\rho^2\sin^2\theta+2]\,d\rho\,d\theta$$

unde

$$\Delta'=[0,1]\times[0,2\pi].$$

$$\mathcal{J}=2\iint_{\Delta}[3\cos^2\theta+1)\rho^3-4\rho^2\cos\theta+3\rho]\,d\rho\,d\theta=$$

$$=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1[\rho^3(3\cos^2\theta+1)-4\rho^2\cos\theta+3\rho]\,d\rho=$$

$$=2\int_0^{2\pi}\left[\frac{3\cos^2\theta+1}{4}-\frac{4}{3}\cos\theta+\frac{3}{2}\right]d\theta=4\pi\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\right)=\frac{17\pi}{2}.$$

5. Să se calculeze $\iint_D \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dx\,dy$ unde D este: $x^2+\frac{y^2}{9}\leqslant 1,$

$$y\geqslant\frac{x}{\sqrt{3}};\quad y\leqslant\frac{x}{\sqrt{2}}.$$

R: Domeniul D este reprezentat în figura 30.
Trecem în coordonatele polare: $x=\rho\cos\theta;\quad y=3\rho\sin\theta;$

$$3\rho\sin\theta\geqslant\frac{\rho\cos\theta}{\sqrt{3}};\quad \operatorname{tg}\theta\geqslant\frac{1}{3\sqrt{3}},\quad 3\rho\sin\theta\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\rho\cos\theta,\quad \operatorname{tg}\theta\leqslant\frac{1}{3\sqrt{2}}$$

$$dx\,dy=3\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$\iint_D \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dx\,dy=3\iint_{D'}\rho\operatorname{arctg}(3\operatorname{tg}\theta)\,d\rho\,d\theta=$$

$$=3\int_{\operatorname{arctg}\frac{1}{3\sqrt{3}}}^{\operatorname{arctg}\frac{1}{3\sqrt{2}}}\frac{3\operatorname{tg}\theta-\operatorname{tg}^3\theta}{1-3\operatorname{tg}^2\theta}\,d\theta\int_0^1\rho\,d\rho$$

(facem schimbarea $\operatorname{tg}^2\theta=u$)

$$\mathcal{J}=\frac{3}{4}\int_{\frac{1}{27}}^{\frac{1}{18}}\frac{(3-u)\,du}{(1-3u)(1+u)}=$$

$$=\left[-\frac{1}{2}\ln|3u-1|+\frac{3}{4}\ln|u+1|\right]_{\frac{1}{27}}^{\frac{1}{18}}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{16}{15}+\frac{3}{4}\ln\frac{57}{56}$$

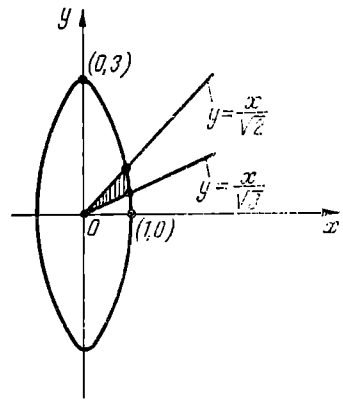

Fig. 30

6. Să se calculeze: $\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+\frac{y^2}{3}}}$, unde D este domeniul mărginit de curba

$$\left(x^2+\frac{y^2}{3}\right)^2 = x^2y$$

R: În coordonatele polare $x=\rho\cos\theta$; $y=\rho\sqrt{3}\sin\theta$; $dx\,dy=\sqrt{3}\rho\,d\rho\,d\theta$, ecuația curbei devine:

$$\rho=\sqrt{3}\cos^2\theta\sin\theta;\quad \sin\theta\geqslant 0,\quad \theta\in[0,\pi].$$

Cu aceste schimbări D' fiind transformatul lui D, avem

$$I=\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^{2/3}}}=\sqrt{3}\iint\limits_{D'}\frac{\rho\,d\rho\,d\theta}{\rho}=\sqrt{3}\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}\cos^3\theta\sin\theta}d\rho=$$

$$=-3\int_0^{\pi}\cos^2\theta\,d(\cos\theta)=-3\frac{\cos^3\theta}{3}\Big|_0^{\pi}=2.$$

7. Să se calculeze $I=\iint\limits_D \ln|\sin(x-y)|\,dx\,dy$,

unde

$$D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant y\leqslant\pi\}$$

R: Domeniul de integrare este reprezentat în figura 31, a.

Facem schimbarea de variabile

$$x=\frac{u+v}{2},\quad y=\frac{u-v}{2}$$

pentru care:

$$dx\,dy=-\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}du\,dv=\frac{1}{2}\,du\,dv.$$

Domeniul D' transformatul domeniului D este: $u+v\geqslant 0$, $u-v\leqslant\pi$, $v\leqslant 0$ (figura 31, b).

Înlocuim domeniul D' cu domeniul D'' (figura 31, c) (deoarece funcția de sub integrală păstrează un semn constant).

Integrala devine:

$$I=\frac{1}{2}\iint\limits_{D'}\ln|\sin v|\,du\,dv=\frac{1}{2}\iint\limits_{D''}\ln|\sin v|\,du\,dv=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}du\int_{-\pi}^{0}\ln|\sin v|\,dv=\frac{\pi}{2}\int_{-\pi}^{0}\ln|\sin v|\,dv.$$

Calculăm integrala făcînd schimbarea $v = -t$,

$$\int_{-\pi}^{0} \ln|\sin v|\, dv = -\int_{\pi}^{0} \ln(\sin t)\, dt = \int_{0}^{\pi} \ln(\sin t)\, dt$$

$$\int_{0}^{\pi} \ln(\sin t)\, dt = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\, dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin t)\, dt =$$

$$= \int_{0}^{\pi/2} \ln(\sin t)\, dt + \int_{0}^{\pi/2} \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + u\right)\right) du =$$

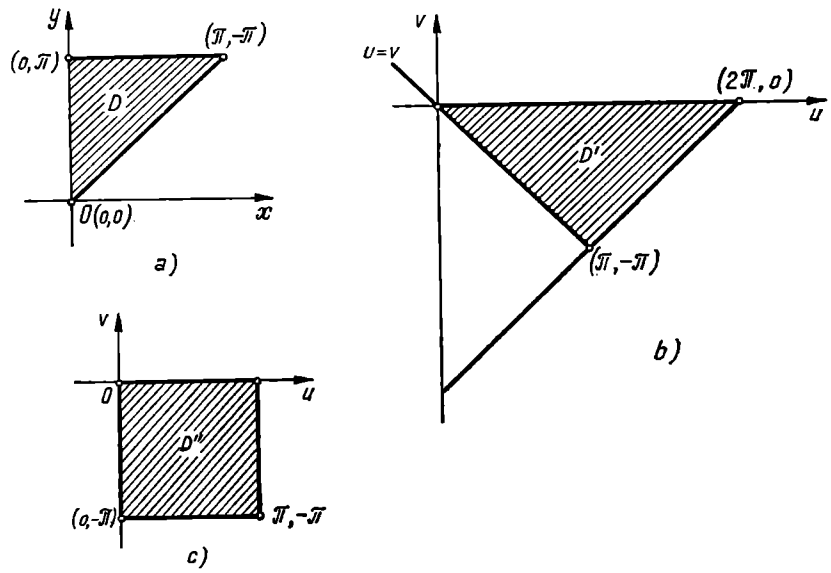

Fig. 31

$$\left(\text{unde } t - \frac{\pi}{2} = u\right)$$

$$= \int_{0}^{\pi/2} \ln(\sin t)\, dt + \int_{0}^{\pi/2} \ln(\cos u)\, du.$$

Dar

$$\int_{0}^{\pi/2} \ln(\cos u)\, du = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \ln(\sin z)\, dz = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin z)\, dz$$

$$\left(\text{unde am pus } \frac{\pi}{2} - u = z\right).$$

Am arătat deci că

$$\int_{0}^{\pi} \ln(\sin t)\, dt = 2\int_{0}^{\pi/2} \ln(\sin t)\, dt.$$

Vom calcula în alt mod integrala

$$\int_0^{\pi} \ln(\sin t)\,dt = \int_0^{\pi} \left(\ln 2 + \ln\left(\sin\frac{t}{2}\right) + \ln\left(\cos\frac{t}{2}\right)\right) dt =$$

$$= \pi \ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin u)\,du + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos u)\,du.$$

Egalînd valorile obţinute rezultă

$$\pi \ln 2 + 2\int_0^{\pi/2} \ln(\sin u)\,du = 0$$

deci

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin u)\,du = -\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

Obţinem astfel

$$I = \frac{\pi}{2}(\pi \ln 2 - 2\pi \ln 2) = -\frac{\pi^2 \ln 2}{2}.$$

8. Să se stabilească egalitatea

$$\iint_D f(xy)(1-x)^{p-1} y^p (1-y)^{q-1}\,dx\,dy = B(p,q)\int_0^1 f(t)(1-t)^{p+q-1}\,dt,$$

unde $D = [0,1]\times[0,1]$, iar B este funcţia de speţa întîia a lui Euler.

R: În integrala dublă facem schimbarea de variabile:

$$x = \frac{1-u-v}{1-v}, \quad y = 1-v.$$

Imaginea pătratului $[0,1]\times[0,1]$ este domeniul $u \geqslant 0,\ v \geqslant 0,\ u+v \leqslant 1$

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{1-v} & \frac{u}{(1-v)^2} \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{1-v}$$

avem

$$I = \iint_{\Delta} f(1-u-v)\left(\frac{u}{1-v}\right)^{p-1}(1-v)^{p-1}v^{q-1}\,du\,dv =$$

$$= \iint_{\Delta} f(1-u-v)\,u^{p-1}v^{q-1}\,du\,dv,$$

unde Δ este: $u \geqslant 0,\ v \geqslant 0,\ u+v \leqslant 1$.

În această integrală vom face $1 - u - v = t$, $u = u$; domeniul Δ', transformatul lui Δ este $u \geqslant 0$, $t \geqslant 0$, $u + t \leqslant 1$; integrala devine:

$$I = \iint_{\Delta'} f(t)\, u^{p-1}(1 - u - t)^{q-1}\, du\, dt = \int_0^1 f(t) \int_0^{1-t} u^{p-1}(1 - t - u)^{q-1}\, du,$$

dar

$$\int_0^{1-t} u^{p-1}(1 - t - u)^{q-1}\, du =$$

$$= (1 - t)^{p+q-1} \int_0^{1-t} \left(\frac{u}{1-t}\right)^{p-1} \left(1 - \frac{u}{1-t}\right)^{q-1} d\left(\frac{u}{1-t}\right) =$$

$$= (1 - t)^{p+q-1} \int_0^1 z^{p-1}(1 - z)^{q-1}\, dz$$

am notat

$$z = \frac{u}{1-t};$$

deci

$$\int_0^{1-t} u^{p-1}(1 - t - u)^{q-1}\, du = (1 - t)^{p+q-1}\, B(p, q)$$

şi

$$I = B(p, q) \int_0^1 f(t)\, (1 - t)^{p+q-1}\, dt$$

9. Să se calculeze

$$\iint_D \frac{dx\, dy}{1 + y \cos x}$$

unde

$$D = \left\{(x, y) \mid x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad y \in [0, a]\right\}$$

apoi să se deducă valoarea integralei

$$J(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 + a \cos x)}{\cos x}\, dx, \quad a \in (0, 1).$$

R: Avem

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^a \frac{dy}{1 + y \cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 + a \cos x)}{\cos x}\, dx = J(a)$$

schimbînd ordinea de integrare, obţinem şi

$$I = \int_0^a dy \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + y \cos x};$$

pe a doua integrală din partea a doua o calculăm cu schimbarea de variabilă $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$; dacă punem şi $y = \cos 2\theta$, obţinem

$$J(a) = I = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{1}{2}\arccos a} 2\sin 2\theta d\theta \int_0^1 \frac{1}{1+\cos 2\theta \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

$$= -4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{1}{2}\arccos a} \sin 2\theta \int_0^1 \frac{1}{\sin 2\theta} \frac{d(t\operatorname{tg}\theta)}{1+t^2\operatorname{tg}^2\theta} = -2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{1}{2}\arccos a} \theta\, d\theta$$

$$= \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}(\arccos a)^2.$$

10. Să se calculeze aria domeniului plan mărginit de curba de ecuaţie:

$$(x^2+y^2)^2 = 2ax^3, \quad a>0.$$

R: Facem transformarea domeniului în coordonate polare:

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant 2a\cos^3\theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2};$$

$$A = \iint_D dx\,dy = \iint_{D'} \rho\, d\rho\, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a\cos^3\theta} \rho d\rho =$$

$$= 2a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^6\theta d\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2\theta + 1)^3\, d\theta =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos^2 2\theta + 1)\, d\theta = \frac{5\pi a^2}{8}.$$

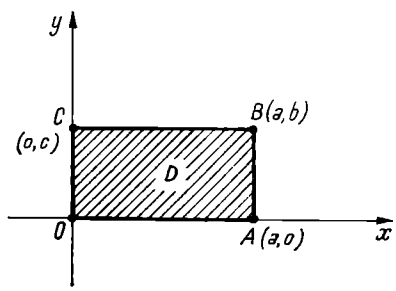

Fig. 32

11. Să se determine momentul de inerţie a plăcii plane omogene dreptunghiulare cu laturile a şi b faţă de latura a.

R: Alegem sistemul de coordonate astfel ca axele să coincidă cu laturile dreptunghiului (figura 32)

$$I_{0A} = \rho_0 \iint_D y^2\, dx\, dy = \rho_0 \int_0^a dx \int_0^b y^2 dy =$$

$$= \frac{b^3 a \rho_0}{3}$$

12. Să se calculeze momentul de inerţie a plăcii plane neomogene de densitate $\rho(x, y) = \frac{1}{x^4}$, mărginită de:

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = a$, $\sqrt{x} + \sqrt{y} = b$, $x = \alpha^2 y$, $x = \beta^2 y$, $0 < a < b$, $0 < \alpha < \beta$, faţă de axa Oy.

R: Momentul de inerţie este dat de:

$$I_{Oy} = \iint_D x^2 \rho \, dx \, dy = \iint_D \frac{1}{x^2} \, dx dy;$$

facem transformarea:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = u, \quad \frac{x}{y} = v, \quad u \in [a, b], \quad v \in [\alpha^2, \beta^2]$$

$$dx\,dy = \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| du\,dv = \frac{1}{-\begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{x}} & \frac{1}{2\sqrt{y}} \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \end{vmatrix}} du\,dv = \frac{2y^2}{u} du\,dv$$

înlocuind aceste rezultate

$$I_{Oy} = 2 \iint_{D'} \frac{du dv}{uv^2} = 2 \int_a^b \frac{du}{u} \int_{\alpha^2}^{\beta^2} \frac{dv}{v^2} =$$

$$= 2(\ln b - \ln a) \left(-\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\alpha^2} \right) = \frac{2(\beta^2 - \alpha^2)}{\beta^2 \alpha^2} \ln \frac{b}{a}.$$

13. Să se calculeze momentul de inerţie faţă de origine a plăcii plane neomogene $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$, de densitate variabilă

$$\rho(x, y) = \frac{1}{\sqrt{b^2x^2 + a^2y^2 + a^2b^2}}$$

R: Avem de calculat integrala dublă

$$I_0 = \iint_D \frac{(x^2 + y^2)\,dx\,dy}{\sqrt{b^2x^2 + a^2y^2 + a^2b^2}}$$

cu D definit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$. D admite reprezentarea parametrică

$x = a\rho \cos\theta$, $y = b\rho \sin\theta$, $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, cu $dx\,dy = ab\rho \, d\rho \, d\theta$,

$$I = ab \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{\rho^3(a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta)\,d\rho}{\sqrt{a^2b^2\rho^2 + a^2b^2}} =$$

$$= \int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta)\, d\theta \int_0^1 \frac{\rho^3 d}{\sqrt{1 + \rho^2}}$$

Putem scrie

$$\int_0^1 \frac{\rho^3 \, d\rho}{\sqrt{1+\rho^2}} = \int_0^1 \frac{\rho(\rho^2+1-1)\, d\rho}{\sqrt{1+\rho^2}} = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{\rho^2+1}\, d(\rho^2+1)$$

$$- \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(\rho^2+1)}{\sqrt{1+\rho^2}} = \frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\,(\rho^2+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 - (\rho^2+1)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1) - (\sqrt{2}-1) = \frac{2-\sqrt{2}}{3}.$$

14. În planul xOy se dă o placă plană (D). Să se găsească expresia generală a momentului de inerție a acestei plăci față de o axă Ou, care face cu axa Ox unghiul θ.

R: Alegem noile axe ca fiind axa Ou și o axă Ov perpendiculară pe aceasta. Legătura între noile și vechile coordonate este dată de:

$$u = x\cos\theta + y\sin\theta$$

$$v = -x\sin\theta + y\cos\theta$$

deci

$$I_{Ou} = \iint_{(D)} v^2 \rho \, dx\, dy = \cos^2\theta \iint_{(D)} y^2\rho \, dx\, dy -$$

$$- 2\sin\theta\cos\theta \iint_{(D)} \rho\, xy \, dx\, dy + \sin^2\theta \iint_{(D)} x^2\rho \, dx\, dy;$$

să notăm

$$K_{xy} = \iint_{(D)} \rho xy \, dx\, dy$$

putem scrie

$$I_{Ou} = I_{Ox}\cos^2\theta - 2K_{xy}\sin\theta\cos\theta + I_{Oy}\sin^2\theta.$$

15. Să se calculeze integrala de suprafață

$$\iint_S \frac{dx\, dy}{\sqrt{4x^2+y^2+1}}$$

unde S este fața exterioară a pînzei paraboloidului

$$4x^2 + y^2 = z, \quad 0 \leqslant z \leqslant 1.$$

R: Elementul de arie al paraboloidului este

$$d\sigma = \sqrt{1+p^2+q^2}\, dx\, dy,$$

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = 8x, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = 2y,$$

deci

$$d\sigma = \sqrt{1+64\,x^2+4y^2}\, dx\, dy.$$

Pe fața exterioară a lui S, normala la S face cu Oz un unghi obtuz, deci

$$dx\,dy = \gamma\,d\sigma \quad \text{cu} \quad \gamma = \frac{-1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

avem

$$I = -\iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{4x^2+y^2+1}},$$

unde D:

$$4x^2 + y^2 \leqslant 1;$$

punem

$$2x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta, \quad dx\,dy = \frac{1}{2}\rho\,d\rho\,d\theta, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi;$$

obținem

$$I = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{\rho^2+1}} = -\pi\sqrt{\rho^2+1}\,\Big|_0^1 = \pi(1-\sqrt{2}).$$

16. Să se determine masa plăcii curbe omogene $x = \sqrt{y^2+z^2}$ situată în interiorul cilindrului $x^2 + y^2 = a^2$; (figura 33).

R: Fie ρ_0 densitatea plăcii, ρ_0 constant

$$\mathfrak{M} = \rho_0 \iint_S d\sigma.$$

Alegem pentru S reprezentarea

$$x = \sqrt{y^2+z^2};$$

$$d\sigma = \sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dy\,dz = \sqrt{1+\frac{y^2+z^2}{y^2+z^2}}\,dy\,dz = \sqrt{2}\,dy\,dz$$

Obținem:

$$\mathfrak{M} = \rho_0\sqrt{2}\iint_D dy\,dz,$$

unde D este: $2y^2 + z^2 \leqslant a^2$; dar $2y^2 + z^2 = a^2$ este elipsa de semiaxe $\frac{a}{\sqrt{2}}$ și a, a cărei arie este $\frac{\pi a^2}{\sqrt{2}}$ deci

$$\mathfrak{M} = \rho_0\pi a^2.$$

17. Să se calculeze aria părții de suprafață $z = ar + b\theta$ care se proiectează în planul xOy în sectorul circular $r \in [0, a]$, $\theta \in [0, \alpha]$. (r și θ reprezintă coordonatele polare).

R: Aria suprafeței este dată de $A = \iint\limits_S d\sigma$.

Folosim reprezentarea suprafeței în coordonate cilindrice:

$$x = r\cos\theta; \quad y = r\sin\theta; \quad z = ar + b\theta$$

$$E = (\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 + a^2 = 1 + a^2$$

$$G = (-r\sin\theta)^2 + (r\cos\theta)^2 + b^2 = r^2 + b^2$$

$$F = ab$$

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2}\, dr\, d\theta = \sqrt{r^2(1 + a^2) + b^2}\, dr\, d\theta$$

$$A = \iint\limits_{[0,a]\times[0,\alpha]} \sqrt{r^2(1 + a^2) + b^2}\, dr\, d\theta = \alpha\sqrt{1 + a^2} \int_0^a \sqrt{r^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{1 + a^2}}\right)^2}\, dr.$$

Luînd $r = \dfrac{b}{\sqrt{1 + a^2}} \operatorname{tg} t$, $t \in \left[0, \operatorname{arc\,tg} \dfrac{a\sqrt{1 + a^2}}{b}\right]$

$$A = \frac{\alpha b^2}{\sqrt{1 + a^2}} \int_0^{\operatorname{arc\,tg} \frac{a\sqrt{1+a^2}}{b}} \frac{dt}{\cos^3 t} = \frac{\alpha b^2}{\sqrt{1 + a^2}} \left[\frac{1}{2} \frac{\sin t}{\cos^2 t} + \frac{1}{4} \ln\left(\frac{1 + \sin t}{1 - \sin t}\right)\right]\Bigg|_{t=0}^{t_1} =$$

$$= \frac{\alpha b^2}{4\sqrt{1 + a^2}} \left[\frac{2a\sqrt{1 + a^2}\sqrt{b^2 + a^2 + a^4}}{b^2} + \ln \frac{a\sqrt{1 + a^2} + \sqrt{b^2 + a^2 + a^4}}{\sqrt{b^2 + a^2 + a^4} - a\sqrt{1 + a^2}}\right].$$

18. Să se calculeze integrala de suprafață

$$\iint\limits_S \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + az + a^2}},$$

unde S este suprafața octantului de sferă

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad z \geqslant 0.$$

R: Pe S avem

$$d\sigma = a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi, \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

$$z = a\cos\theta \quad \text{cu} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Obținem

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2 \sin\theta \, d\theta}{\sqrt{2a^2 + a^2\cos\theta}}$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta \, d\theta}{\sqrt{2+\cos\theta}} = -\pi a \sqrt{2+\cos\theta}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

deci

$$I = \pi a(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = \frac{\pi a}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}.$$

19. Să se determine aria suprafeței $\sqrt{y^2+z^2} = x$ situată în interiorul cilindrului $x^2 + y^2 = a^2$ (fig. 33).

R: Avînd în vedere simetria figurii față de planul xOy,

$$A = 2 \iint_S d\sigma,$$

alegînd pentru suprafață reprezentarea parametrică $z = \sqrt{x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 \leqslant a^2$

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \, dx \, dy = \sqrt{1 + \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}} \, dx \, dy$$

$$d\sigma = \frac{x \, dx \, dy}{\sqrt{x^2 - y^2}}$$

obținem

$$A = 2 \iint_D \frac{x \, dx \, dy}{\sqrt{x^2-y^2}} = 2 \iint_{D'} \frac{\rho^2 \cos\theta \, d\rho \, d\theta}{\rho\sqrt{\cos^2\theta - \sin^2\theta}} =$$

$$= 2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\theta \, d\theta}{\sqrt{1 - 2\sin^2\theta}} \int_0^a \rho \, d\rho = \frac{a^2}{\sqrt{2}} \arcsin(\sqrt{2}\sin\theta)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{\sqrt{2}}\pi.$$

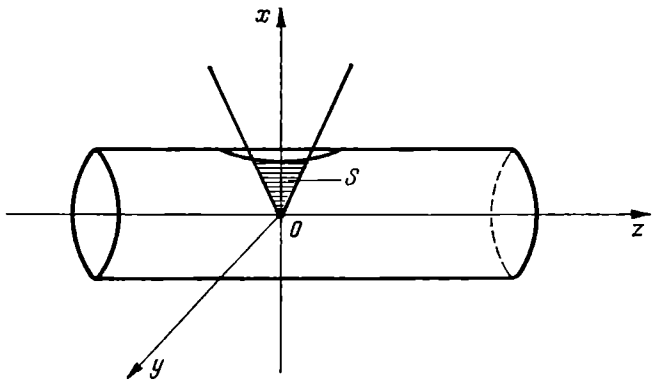

Fig. 33

20. Să se calculeze integrala de suprafață

$$I = \iint_S (z^2\,dx\,dy + x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx),$$

unde S este fața exterioară a tetraedrului $OABC$ cu $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$.

R: Avem

$$\iint_S = \iint_{OAB} + \iint_{OAC} + \iint_{OBC} + \iint_{ABC}.$$

Pe OAB, S este definit de $z = 0$, $x + y \leqslant 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ și normala exterioară are cosinușii directori $(0, -1, 0)$. Pe OBC, S este definit de $x = 0$, $y + z \leqslant 1$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$ și normala exterioară este definită de versorul $(-1, 0, 0)$. Pe ABC, S este definit de $x + y + z \leqslant 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, iar normala exterioară este dirijată după prima bisectoare a triedrului axelor, deci de cosinușii directori $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Obținem astfel

$$\iint_{OAB} = 0, \quad \iint_{OAC} = 0, \quad \iint_{OBC} = 0$$

$$I = \iint_{ABC} (z^2\,dx\,dy + x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx) =$$

$$= \iint_{ABC} (\gamma z^2 + \beta y^2 + \alpha x^2)\,d\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{ABC} (x^2 + y^2 + z^2)\,d\sigma,$$

unde $d\sigma = \sqrt{EG - F^2}\,du dv$; cu $x = u$, $y = v$, $z = 1 - x - y$, $d\sigma = \sqrt{3}\,dx\,dy$; obținem

$$\mathcal{J} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x^2 + y^2 + (1 - x - y)^2)\,dy =$$

$$= \int_0^1 \left[2x^2(1 - x) + \frac{2}{3}(1 - x)^3 + \frac{1}{3}(x - 1)^3\right] dx = \frac{1}{12}.$$

21. Să se calculeze

$$\iint_S (z^n - y^n)\,dy\,dz + (x^n - z^n)\,dx\,dy + (y^n - x^n)\,dx\,dy,$$

unde S este emisfera superioară $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z > 0$.

R: O reprezentare parametrică a suprafeței S este

$$x = R \sin\theta \cos\varphi, \quad y = R \sin\theta \sin\varphi, \quad z = R \cos\theta$$

$$dx\,dy = \gamma\,d\sigma; \quad dydz = \alpha\,d\sigma; \quad dz\,dx = \beta\,d\sigma.$$

unde $d\sigma = R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$;

$$\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

unde

$$A = \begin{vmatrix} R\cos\theta\sin\varphi & R\sin\theta\cos\varphi \\ -R\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = R^2 \sin^2\theta\cos\varphi$$

$$B = \begin{vmatrix} -R\sin\theta & 0 \\ R\cos\theta\cos\varphi & -R\sin\theta\sin\varphi \end{vmatrix} = R^2 \sin^2\theta\sin\varphi$$

$$C = \begin{vmatrix} R\cos\theta\cos\varphi & -R\sin\theta\sin\varphi \\ R\cos\theta\sin\varphi & R\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix} = R^2 \sin\theta\cos\theta$$

deci

$$\alpha = \sin\theta\cos\varphi, \quad \beta = \sin\theta\sin\varphi, \quad \gamma = \cos\theta;$$

integrala devine:

$$R^{n+2} \iint_D [\cos^n\theta - \sin^n\theta\sin^n\varphi)\sin^2\theta\cos\varphi + (\sin^n\theta\cos^n\varphi - \cos^n\theta)\sin\theta\cos\theta +$$

$$+ (\sin^n\theta\sin^n\varphi - \sin^n\theta\cos^n\varphi)\sin^2\theta\sin\varphi] =$$

$$= R^{n+2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos^n\theta\sin^2\varphi\cos\varphi - \sin^{n+2}\theta\sin^n\varphi\cos\varphi -$$

$$- \sin^{n+2}\theta\cos^n\varphi\sin\varphi + \sin^{n+1}\theta\cos^n\varphi\cos\theta - \cos^{n+1}\theta\sin\theta +$$

$$+ \sin^{n+2}\theta\sin^{n+1}\varphi] \, d\theta = R^{n+2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\cos^n\varphi}{n+2} + \frac{1}{n+2} + \right.$$

$$\left. + \sin^{n+1}\begin{cases} \dfrac{(n+1)!!}{(n+2)!!}\dfrac{\pi}{2}, & n \text{ par} \\ \dfrac{(n+1)!!}{(n+2)!!} & n \text{ impar} \end{cases}\right] d\varphi$$

Pentru n par:

$$I = \frac{R^{n+2}}{n+2} \int_0^{2\pi} (\cos^n\varphi + 1) \, d\varphi = \frac{2\pi R^{n+2}}{n+2} \left(\frac{C_n^{\frac{n}{2}}}{2^n} + 1\right).$$

Pentru n impar:

$$I = R^{n+2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{n+2} + \frac{(n+1)!!}{(n+2)!!}\sin^{n+1}\varphi\right) d\varphi =$$

$$= R^{n+2} \, 2\pi \left(\frac{1}{n+2} + \frac{(n+1)!!}{(n+2)!!} \frac{C_{n+1}^{\frac{n+1}{2}}}{2^{n+1}}\right)$$

22. Să se calculeze

$$I = \iint_S \left(\frac{1}{a} \frac{dy\,dz}{x} + \frac{1}{b} \frac{dz\,dx}{y} + \frac{1}{c} \frac{dx\,dy}{z} \right),$$

unde S este fața exterioară a elipsoidului

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

R: Dacă normala exterioară are cosinușii directori α, β, γ, atunci integrala se scrie

$$I = \iint_S \left(\frac{\alpha}{ax} + \frac{\beta}{by} + \frac{\gamma}{cz} \right) d\sigma$$

Dacă luăm pentru S reprezentarea

$$x = a \sin\theta \cos\varphi$$
$$y = b \sin\theta \sin\varphi$$
$$z = c \cos\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi$$

atunci avem

$$I = \iint_D \left(\frac{A}{ax} + \frac{B}{by} + \frac{C}{cz} \right) d\theta\, d\varphi$$

cu $D = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ și

$$A = \frac{D(y, z)}{D(\theta, \varphi)} = bc \sin^2\theta \cos\varphi.$$

$$B = \frac{D(z, x)}{D(\theta, \varphi)} = ac \sin^2\theta \sin\varphi,$$

$$C = \frac{D(x, y)}{D(\theta, \varphi)} = ab \sin\theta \cos\theta,$$

obținem astfel

$$I = \iint_D \left(\frac{bc}{a^2} \sin\theta \frac{ac}{b^2} \sin\theta + \frac{ab}{c^2} \sin\theta \right) d\theta\, d\varphi,$$

sau

$$I = 4\pi \left(\frac{bc}{a^2} + \frac{ac}{b^2} + \frac{ab}{c^2} \right).$$

23. Să se demonstreze formula lui Poisson

$$\iint_S f(ax + by + cz)\, d\sigma = 2\pi \int_{-1}^{1} f(u\sqrt{a^2 + b^2 + c^2})\, du$$

S fiind suprafața sferei $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

R: Trecem de la sistemul (x, y, z) la sistemul (u, v, w) alegînd drept plan (v, w) planul $ax + by + cz = 0$ și orientînd axa u perpendicular pe acest plan. Atunci

$$u = \frac{ax + by + cz}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\iint_S f(ax + by + cz)\, d\sigma = \iint_S f(u\sqrt{a^2 + b^2 + c^2})\, d\sigma.$$

În noul sistem de coordonate, ecuația sferei este:

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1$$

alegem reprezentarea parametrică a suprafeței sferei: $u = u$, $v = \sqrt{1 - u^2}\cos\theta$, $w = \sqrt{1 - u^2}\sin\theta$, $(-1 \leqslant u \leqslant 1)$, $0 \leqslant \theta < 2\pi)$; elementul de suprafață se scrie $d\sigma = du\, dv$, deci,

$$\iint_S f(ax + by + cz)\, d\sigma = \iint_{S'} f(u\sqrt{a^2 + b^2 + c^2})\, d\theta\, du =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-1}^{1} f(u\sqrt{a^2 + b^2 + c^2})\, du = 2\pi \int_{-1}^{1} f(u\sqrt{a^2 + b^2 + c^2})\, du$$

24. Să se arate că $\iint_{D\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1$ unde:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - \rho^2}} \exp\left[-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1 - \rho^2)}\right]$$

și

$$D_\infty : (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty); \quad (\rho^2 = \text{const}, \quad \rho^2 < 1).$$

R: Avem

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{1 - \rho^2}} \iint_{D\infty} e^{-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1 - \rho^2)}}\, dx\, dy = \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - \rho^2}} \iint_{D\infty} e^{-\frac{(x - \rho y)^2 + (1 - \rho^2) y^2}{2(1 - \rho)^2}}\, dx\, dy$$

și facem schimbarea de variabile:

$$\frac{x - \rho y}{\sqrt{2}\sqrt{1 - \rho^2}} = u; \quad \frac{1}{\sqrt{2}} y = v;$$

$$dx\, dy = \left|\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right| du\, dv = \frac{1}{\left|\frac{D(u, v)}{D(x, y)}\right|} du\, dv =$$

$$= \frac{du\, dv}{\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1 - \rho^2}} & -\frac{\rho}{\sqrt{2}\sqrt{1 - \rho^2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}} = 2\sqrt{1 - \rho^2}\, du\, dv$$

obținem:

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\iint_{D_\infty} e^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}}\,dx\,dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,du\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2}\,dv = 1$$

deoarece

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}\,.$$

25. Să se calculeze integrala de suprafață

$$I = \iint_S \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+4z^2}},$$

unde S suprafața jumătății de sferă $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z\geqslant 0$.

R: O reprezentare parametrică a lui S este

$$x = a\sin\theta\cos\varphi,$$
$$y = a\sin\theta\sin\varphi,$$
$$z = a\cos\theta,$$

cu $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$, $0\leqslant\varphi<2\pi$. Avem $d\sigma = \sqrt{EG-F^2}\,d\theta\,d\varphi$

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2 = a^2,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2 = a^2\sin^2\theta,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\frac{\partial y}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}+\frac{\partial z}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi} = 0,$$

deci $d\sigma = a^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$. Cu aceste elemente integrala din enunț se scrie

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{a^2+3a^2\cos^2\theta}} = -2\pi a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\cos\theta)}{\sqrt{1+3\cos^2\theta}}.$$

obținem

$$\int \frac{d(\cos\theta)}{\sqrt{1+3\cos^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left(\sqrt{3}\cos\theta+\sqrt{1+3\cos^2\theta}\right)$$

deci

$$I = \frac{-2\pi a}{\sqrt{3}}\ln\left(\sqrt{3}\cos\theta+\sqrt{1+3\cos^2\theta}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi a}{\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3}).$$

26. Să se calculeze momentul de inerție al pînzei conice:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2} = \frac{z^2}{b^2},\quad 0\leqslant z\leqslant b\ \ldots,$$

de densitate $\rho = \text{const.}$ în raport cu dreapta:

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z-b}{0}.$$

R: Notînd cu d distanța de la punctul $M(x, y, z)$ la dreapta

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z-b}{0},$$

obținem:

$$d^2 = y^2 + (z-b)^2$$

momentul de inerție căutat este dat de

$$I = \rho_0 \iint_S [y^2 + (z-b)^2]\, d\sigma$$

S fiind suprafața

$$z = \frac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2},\ 0 \leqslant z \leqslant b;\ d\sigma = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\, dx\, dy$$

cu aceste elemente I devine:

$$I = \frac{\rho_0 \sqrt{a^2+b^2}}{a} \iint_D \left[y^2 + \left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2} - b^2\right)\right] dx\, dy,$$

unde D este definit de $x^2 + y^2 \leqslant a^2$.

Trecînd la coordonate polare:

$$x = \varphi \cos\theta,\ y = \rho \sin\theta,\ 0 \leqslant \rho \leqslant a;\ 0 \leqslant \theta < 2\pi$$

se obține:

$$I = \frac{\pi a\, \rho_0 (a^2+b^2)\sqrt{a^2+b^2}}{4}.$$

27. Să se determine aria suprafeței de ecuație

$$r = c\frac{\sin\varphi}{\sin\theta},$$

(r, θ, φ, coordonate polare în spațiu),

$$c > 0,\ \theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right],\ \varphi \in [0, \pi].$$

R: Luăm reprezentarea parametrică a suprafeței

$$x = r \sin\theta \cos\varphi = c \sin\varphi \cos\varphi.$$

$$y = r \sin\theta \sin\varphi = c \sin^2\varphi$$

$$z = r \cos\theta = c \sin\varphi \operatorname{ctg}\theta.$$

Avem

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 = c^2(1 + \cos^2 \varphi \operatorname{ctg}^2 \theta)$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = c^2 \frac{\sin^2 \varphi}{\sin^4 \theta};$$

$$F = -\frac{c^2 \cos^2 \varphi}{\sin^2 \theta}; \quad \sqrt{EG - F^2} = c^2 \frac{\sin \varphi}{\sin^2 \theta},$$

deci cu

$$D = [0, \pi] \times \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right],$$

$$A = \iint_S d\sigma = c^2 \iint_D \frac{\sin \varphi}{\sin^2 \theta} d\varphi \, d\theta = 4c^2.$$

28. Să se găsească centrul de greutate al unei cupole formată dintr-o zonă sferică S_1 și o calotă sferică S_2 (figura 34) omogenă, definite de

$$S_1 = \{(x, y, z) \mid (z + a\sqrt{2})^2 + y^2 + x^2 = 10a^2, z \leqslant \sqrt{x^2 + y^2}, z \geqslant 0\}.$$

$$S_2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2, z \geqslant \sqrt{x^2 + y^2}\}$$

R: Calota sferică S_2 definită de $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$, $z \geqslant \sqrt{x^2 + y^2}$ admite reprezentarea parametrică

$$x = 2a \sin \theta \cos \varphi,$$

$$y = 2a \sin \theta \sin \varphi,$$

$$z = 2a \cos \theta$$

cu

$$0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

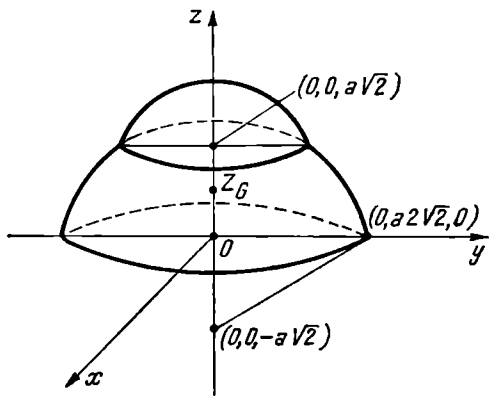

Fig. 34

Zona sferică S_1 admite reprezentarea parametrică

$$x = a\sqrt{10} \sin \theta' \cos \varphi',$$

$$y = a\sqrt{10} \sin \theta' \sin \varphi',$$

$$z = -a\sqrt{2} + a\sqrt{10} \cos \theta'$$

cu

$$\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2, \ \operatorname{tg} \theta_1 = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg} \theta_2 = 2 \text{ și } 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

Asamblarea celor două suprafețe se face după cercul $z = a\sqrt{2}$, $x^2 + y^2 = 2a^2$.

Din motive de simetrie $x_G = y_G = 0$. Rămîne să calculăm pe z_G dat de

$$z_G = \frac{\iint\limits_S z\,d\sigma}{\iint\limits_S d\sigma}.$$

Pe calota S_2 elementul de arie

$$d\sigma = 4a^2 \sin\theta\, d\theta d\varphi;$$

pe zona sferică S_1 elementul de arie

$$d\sigma = 10\, a^2 \sin\theta' d\theta'\, d\varphi',$$

deci

$$\iint\limits_S d\sigma = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4a^2 \sin\theta d\theta + \int_0^{2\pi} d\,' \int_{\theta_1}^{\theta_2} 10\, a^2 \sin\theta' d\theta' =$$

$$= 8\,\pi a^2 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 20\pi a^2(\cos\theta_1 - \cos\theta_2).$$

Avem însă

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{1}{2}, \quad \cos\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\theta_1}} = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$\operatorname{tg}\theta_2 = 2, \quad \cos\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

deci

$$\iint\limits_S d\sigma = 4\pi a^2(2 - \sqrt{2}) + \frac{20}{\sqrt{5}}\pi a^2$$

avem și

$$\iint\limits_S z\,d\sigma = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} 8a^3 \cos\theta \cdot \sin\theta d\theta +$$

$$+ \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{\theta_1}^{\theta_2} (-a\sqrt{2} + a\sqrt{10}\cos\theta') 10\, a^2 \sin\theta' d\theta' =$$

$$= 4\pi a^3 + 20\sqrt{2}\, a^3 \pi(\cos\theta_2 - \cos\theta_1) + 10\sqrt{10}\pi a^3 \cdot (\cos^2\theta_1 - \cos^2\theta_2) =$$

$$= 4\pi a^3 - \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\pi a^3 + 6\sqrt{10}\pi a^3 = (4 + 2\sqrt{10})\,\pi a^3$$

deci

$$z_G = \frac{2 + \sqrt{10}}{2(2 - \sqrt{2}) + 2\sqrt{5}}\, a \sim 0{,}9\, a.$$

29. Să se găsească potențialul suprafeței $z = \frac{h}{R}\sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leqslant z \leqslant h$ în centrul bazei conului.

R: Punînd $l = \sqrt{R^2 + h^2}$ avem:

$$W = \frac{l}{R}\rho \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} \frac{dx\,dy}{x^2 + y^2 + (z-h)^2} = 2\pi l\rho \int_0^R \frac{r\,dr}{\sqrt{l^2r^2 - 2Rh^2r + h^2R^2}} =$$

$$= \frac{2\pi}{l}\rho \int_0^R \frac{l^2r - Rh^2}{\sqrt{l^2r^2 - 2Rh^2\,r + h^2R^2}}\,dr + \frac{2\pi\,Rh^2\rho}{l}\int_0^R \frac{dr}{\sqrt{l^2r^2 - 2Rh^2r + h^2R^2}} =$$

$$= \frac{2\pi\rho}{l}\sqrt{l^2r^2 - 2Rh^2r + h^2R^2}\Big|_{r=0}^{r=R} +$$

$$+ \frac{2\pi Rh^2\rho}{l^2}\ln\left(l^2r - Rh^2 + \sqrt{l^2(l^2r^2 - 2Rh^2r + h^2R^2)}\right)\Big|_{r=0}^{r=R} =$$

$$= \frac{2\pi\,R\rho}{l}(R - h) + \frac{2\pi Rh^2\rho}{l^2}\ln\frac{R}{h}\cdot\frac{l+R}{l-h}.$$

CAPITOLUL XI

INTEGRALE TRIPLE. APLICAȚII

1. Să se calculeze integrala tripală

$$I = \iiint_V \frac{x\,dx\,dy\,dz}{(x^2+y+z+1)^3},$$

unde V este definit de $x+y+z\leqslant 1$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$.

R: În tetraedrul V avem $0\leqslant z\leqslant 1-x-y$, deci

$$I = \iint_D x\,dx\,dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(x^2+y+z+1)^3} =$$

$$= \frac{1}{2}\iint_D \left[\frac{1}{(x^2+y+1)^2} - \frac{1}{(x^2-x+2)^2}\right] x\,dx\,dy,$$

unde D este proiecția lui V pe planul xOy și este definit de $x+y\leqslant 1$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$. Avem, așadar

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 x\,dx \int_0^{1-x}\left[\frac{1}{(x^2+y+1)^2} - \frac{1}{(x^2-y+2)^2}\right] dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[-\frac{1}{x^2+y+1}\Big|_0^{1-x} - \frac{1}{x^2-y+2}\Big|_0^{1-x}\right] x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2-x+2} - \frac{1}{x^2+x+1} + \frac{1}{x^2+2}\right] x\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\ln(x^2+1)\Big|_0^1 + \frac{1}{4}\ln(x^2+2)\Big|_0^1 + \frac{1}{4}\ln(x^2-x+2)\Big|_0^1 -$$

$$- \frac{1}{4}\ln(x^2+x+1)\Big|_0^1 + \frac{1}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{7}}\Big|_0^1 + \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{4}\ln 2 + \frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\sqrt{3} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

2. Să se calculeze volumul corpului definit de (figura 35)

$$x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ z \leqslant 1 - y^2,\ x + y \leqslant 1.$$

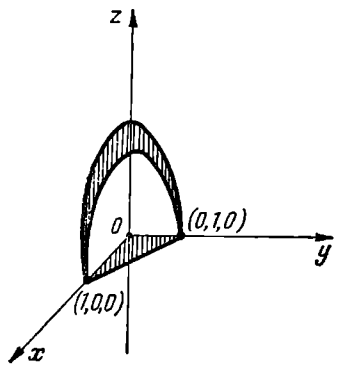

Fig. 35

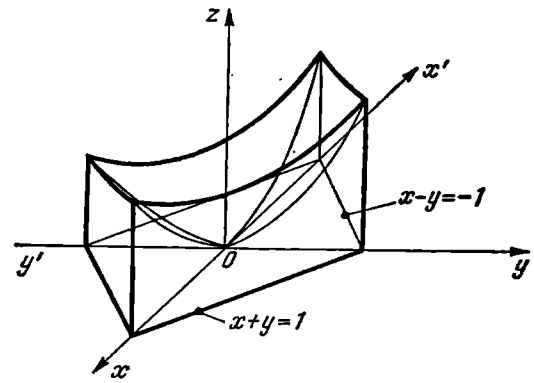

Fig. 36

R: $V = \iiint\limits_V dx\,dy\,dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-y^2} dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - y^2)\,dy =$

$$= \int_0^1 \left(1 - x - \frac{y^3}{3}\Big|_0^{1-x}\right) dx = \int_0^1 \left(1 - x - \frac{(1-x)^3}{3}\right) dx =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{5}{12}.$$

3. Să se determine momentul de inerţie în raport cu axa Oz a corpului omogen mărginit de suprafeţele:

$$z = x^2 + y^2,\ x + y = \pm 1,\ x - y = \pm 1,\ z = 0 \text{ (figura 36)}$$

$$IO_z = \rho_0 \iiint\limits_\Omega (x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz = \rho_0 \iint\limits_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy \int_0^{x^2+y^2} dz =$$

$$= \rho_0 \iint\limits_D (x^2 + y^2)^2\,dx\,dy = 4\rho_0 \int_{D_1} (x^2 + y^2)^2\,dx\,dy =$$

$$= 4\rho_0 \int_0^1 dx \int_1^{1-x} (x^4 + 2x^2y^2 + y^4)\,dy = 4\rho_0 \int_0^1 (x^4(1 - x) +$$

$$+ \frac{2x^2}{3}(1 - x)^3 + \frac{1}{5}(1 - x)^5\,dx =$$

$$= 4\rho_0 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{2}{9} - \frac{2}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{30}\right) = \frac{14\rho_0}{45}.$$

4. Volumele corpurilor mărginite de suprafeţele:

a) $z = 4 - y^2,\quad z = y^2 + 2,\quad -1 \leqslant x \leqslant 2$ (figura 37 a)

b) $(x - 1)^2 + y^2 = z,\quad 2x + z = 2$ (figura 37 b)

c) $(x^2 + y^2)^2 + z^4 = a^3z$

R: a) $V = \iiint\limits_{\Omega} dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\Omega} dy\,dz \int_{-1}^{2} dx = 3 \iint\limits_{D} dy\,dz.$

Domeniul D este reprezentat în figura 37, c.

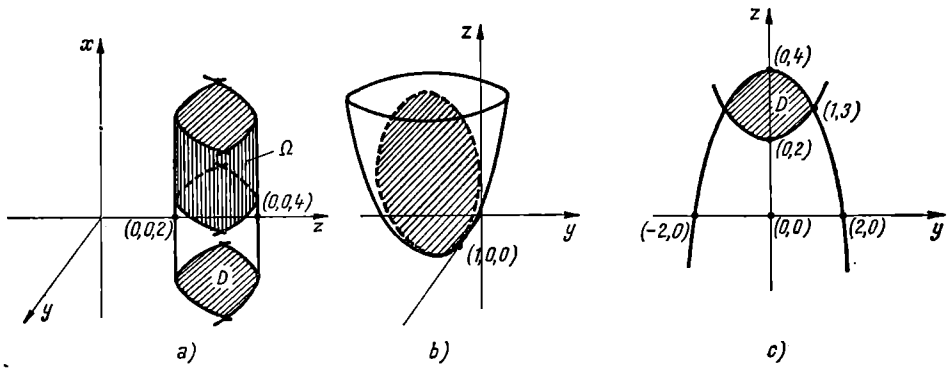

Fig. 37 *a, b, c*

$$V = 3\int_{-1}^{1} dy \int_{y^2+2}^{4-y^2} dz = 3\int_{-1}^{1} (2 - 2y^2)\,dy = 6\left(2 - \frac{2}{3}\right) = 8$$

b) $V = \iiint\limits_{\Omega} dx\,dy\,dz = \iint\limits_{D} dx\,dy \int_{(x-1)^2+y^2}^{2-2x} dz = \iint\limits_{D} [2 - 2x - (x -$

$$- 1)^2 - y^2]\,dx\,dy = \iint\limits_{D} (1 - x^2 - y^2)\,dx\,dy,$$

unde D este domeniul $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

Facem schimbarea $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $r \in [0, 1]$; $\theta \in [0, 2\pi]$. Cu aceasta

$$V = \iiint\limits_{D'} (1 - r^2) r\,dr\,d\theta = 2\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

c) Trecem la coordonate sferice

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$

$$z = r\cos\theta$$

$$r \in \left[0,\ a\sqrt[3]{\frac{\cos\theta}{1 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta}}\right],\ \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right];\ \varphi \in [0, 2\pi]$$

$$dx\,dy\,dz = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$V = \iiint_{\Omega} dx\,dy\,dz = \iiint_{\Omega'} r^2 \sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\,d\theta \int_0^{a\sqrt[3]{\frac{\cos\theta}{1-2\sin^2\theta\cos^2\theta}}} r^2 dr = \frac{2\pi a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta\,\sin\theta}{1-2\sin^2\theta\cos^2\theta}\,d\theta =$$

$$= -\frac{\pi a^3}{3} \operatorname{arctg}(\cos 2\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2 a^3}{6}.$$

5. Să se determine coordonatele centrului de greutate ale segmentului cilindric definit de

$$x^2 + y^2 \leqslant a^2,\ z \geqslant by,\ z \geqslant 0,\ b > 0,\ \text{de densitate}\ \rho = \text{const.}$$

R: Avem

$$x_G = \frac{I_x}{M},\quad y_G = \frac{I_y}{M},\quad z_G = \frac{I_z}{M},$$

unde

$$M = \rho \iiint_V dx\,dy\,dz = \frac{2}{3}\rho a^2 b.$$

$$I_x = \iiint_V x\,dx\,dy\,dz = \rho b \iint_D xy\,dx\,dy\,dz$$

unde

$$D:\ x^2 + y^2 \leqslant a^2,\quad y > 0.$$

$$I_x = \rho b \int_{-a}^{a} x\,dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} y\,dy = \rho b \int_{-a}^{a} x(a^2 - x^2)\,dx = 0$$

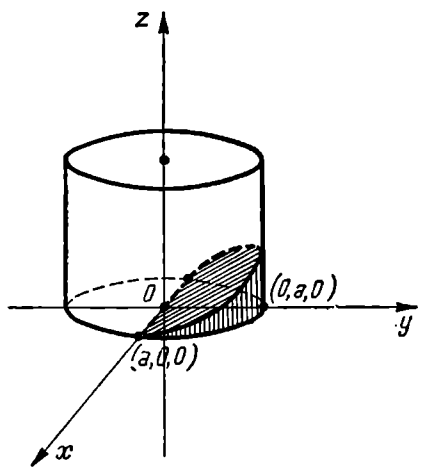

Fig. 8

$$I_y = \rho \iiint_V y\,dx\,dy\,dz = \rho b \iint_D y^2\,dx\,dy =$$

$$= \rho b \int_{-a}^{a} dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} y^2\,dy =$$

$$= \frac{2}{8}\rho b \int_0^a (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{\pi}{8}\rho b a^4.$$

$$I_z = \rho \iiint_V z\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \frac{1}{2} b^2 \rho \iint_D y^2\,dy\,dz = \frac{\pi}{16}\rho b^2 a^4$$

care ne dau

$$x_G = 0,\ y_G = \frac{3\pi}{16}\,a,\ z_G = \frac{3\pi}{32}\,ab.$$

6. Să se determine valoarea medie a funcţiei:

$$f(x, y, z) = e^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}$$

în domeniul

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leqslant 1.$$

R: Valoarea medie a funcţiei este:

$$M = f(\xi,\ \eta,\ \zeta) = \frac{1}{V(\Omega)} \iiint_{\Omega} e^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}\,dx\,dy\,dz.$$

Facem schimbarea

$$x = ar\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = br\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = cr\cos\theta, \qquad r \in [0, 1];\ \theta \in [0, \pi];\ \varphi \in [0, 2\pi]$$

$$M = \frac{3}{4\pi}\iiint_{\Omega'} e^r r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi = \frac{3}{2}\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^1 r^2 e^r\,dr =$$

$$= \frac{3}{2}\,(+2)\left(r^2 e^r\Big|_0^1 - 2\int_0^1 r\,e^r\,dr\right) = 3(e - 2re^r + 2e^r)\Big|_0^1 = 3(e-2)$$

7. Să se calculeze momentul de inerţie faţă de axa Oz al solidului neomogen de densitate

$$\rho(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + hz + a^2}}$$

definit de

$$hz \geqslant x^2 + y^2, \qquad 0 \leqslant z \leqslant h.$$

R: Momentul de inerţie faţă de axa Oz este dat de integrala triplă

$$I\,O_z = \iiint_V \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+hz+a^2}}\,dx\,dy\,dz,$$

deci

$$I = \iint_D dx\,dy\int_{\frac{x^2+y^2}{h}}^{h}\frac{(x^2+y^2)\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+hz+a^2}} =$$

$$= \frac{2}{h}\iint_D \sqrt{x^2+y^2+hz+a^2}\,(x^2+y^2)\Big|_{\frac{x^2+y^2}{h}}^{h} dx\,dy,$$

unde D este discul circular $x^2 + y^2 \leqslant h^2$, proiecţia volumului V pe planul xOy. Avem

$$I = 2h \iint_D (x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2 + h^2 + a^2}\, dx\, dy -$$

$$- 2h \iint_D (x^2 + y^2) \sqrt{2(x^2 + y^2) + a^2}\, dx\, dy.$$

Dacă punem $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, $0 \leqslant \rho \leqslant \sqrt{a^2 + h^2}$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, cu $dx\, dy = \rho\, d\rho\, d\theta$, obţinem

$$I = \frac{2}{h} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h \rho^3 \sqrt{\rho^2 + a^2 + h^2}\, d\rho - \frac{2}{h} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h \rho^3 \sqrt{2\rho^2 + a^2}\, d\rho$$

sau

$$I = \frac{4\pi}{h} \int_0^h \rho(\rho^2 + a^2 + h^2 - a^2 - h^2) \sqrt{\rho^2 + a^2 + h^2}\, d\rho$$

$$- \frac{4\pi}{h} \int_0^h \rho(2\rho^2 + a^2 - a^2) \sqrt{2\rho^2 + a^2}\, d\rho,$$

$$I = \frac{4\pi}{h} \left[\frac{1}{5} (\rho^2 + a^2 + h^2)^{\frac{5}{2}} \Big|_0^h - (a^2 + h^2) \frac{1}{3} (\rho^2 + a^2 + h^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^h \right] -$$

$$- \frac{2\pi}{h} \left[\frac{1}{5} (2\rho^2 + a^2)^{\frac{5}{2}} \Big|_0^h - a^2 \frac{1}{3} (2\rho^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^h \right] =$$

$$= \frac{2\pi}{5} \frac{(2h^2 + a^2)^{\frac{5}{2}}}{h} + \frac{8\pi}{15} \frac{(a^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}}{h} - \frac{4\pi}{15} a^5 - \frac{4\pi}{3} \frac{(a^2 + h^2)(2h^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}{h} +$$

$$+ \frac{2\pi}{3} \frac{a^2(2h^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}{h}.$$

8. Să se calculeze

$$I = \iiint_V \frac{\operatorname{div} [\vec{i} x^2 + \vec{j} y^2 + \vec{k} (y^2 + z^2)]}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + a^2}}\, dx\, dy\, dz$$

cu

$$V: x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2,\ z \geqslant 0.$$

R: Avem

$$\operatorname{div} (\vec{i} x^2 + \vec{j} y^2 + \vec{k}(y^2 + z^2)) = 2x + 2y + 2z$$

deci, folosind coordonatele sferice

$$x = \rho \cos \varphi \sin \theta,\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta,\ z = \rho \cos \theta$$

cu $0 \leqslant \rho \leqslant a$, $0 \leqslant \theta \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ şi $dx\,dy\,dz = \rho^2 \sin \theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$, obţinem

$$I = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \frac{\rho^3\, d\rho}{\sqrt{\rho^2 + a}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \varphi \sin^2 \theta + \sin \varphi \sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta)\, d\theta =$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi}{4} \cos \varphi + \frac{\pi}{4} \sin \varphi + \frac{1}{2}\right) d\varphi \int_0^a \frac{\rho^3\, d\rho}{\sqrt{\rho^2 + a^2}} =$$

$$= 2\pi \int_0^a \frac{\rho^3\, d\rho}{\sqrt{\rho^2 + a^2}} = \frac{\pi}{a^2} \int_0^a \frac{(\rho^2 + a^2 - a^2)\, d(\rho^2 + a^2)}{\sqrt{\rho^2 + a^2}} =$$

$$= \frac{\pi}{a^2}\left[\frac{2}{3}(\rho^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a - 2a^2(\rho^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^a\right] = \pi a^3\left(\frac{\sqrt{2^5}}{3} + \frac{4}{3} - \sqrt{2^3}\right).$$

9. Să se calculeze momentul de inerţie faţă de planul xOy al corpului neomogen de densitate

$$\rho(x, y, z) = \frac{z}{(x^2 + y^2 + 2z^2 + a^2)^2},$$

definit de

$$z^2 \geqslant x^2 + y^2, \quad 0 \leqslant z \leqslant a.$$

R: Momentul de inerţie cerut este dat de integrala triplă

$$I = \iiint_V \frac{z^3}{(x^2 + y^2 + 2z^2 + a^2)^2}\, dx\, dy\, dz$$

unde V este interiorul conului de ecuaţie $z^2 = x^2 + y^2$ cu $0 \leqslant z \leqslant a$. Avem

$$I = \frac{1}{2}\iint_D dx\, dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^a \frac{z^2\, dz^2}{(x^2 + y^2 + 2z^2 + a^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\iint_D \left[\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2 + 2z^2 + a^2) + \right.$$

$$= \frac{1}{2}\left.\frac{x^2 + y^2 + a^2}{x^2 + y^2 + 2z^2 + a^2}\right]_{\sqrt{x^2+y^2}}^a dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{4}\iint_D \left[\ln \frac{x^2 + y^2 + 3a^2}{3(x^2 + y^2) + a^2} + \frac{x^2 + y^2 + a^2}{x^2 + y^2 + 3a^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{x^2 + y^2 + a^2}{3(x^2 + y^2) + a^2}\right] dx\, dy,$$

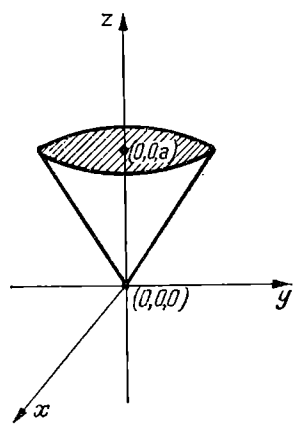

Fig. 39

unde D este proiecția volumului V pe planul xOy, deci este discul circular $x^2 + y^2 \leqslant a^2$. Dacă punem $x = \rho \cos\theta$, $y = \rho \sin\theta$,

$$0 \leqslant \rho \leqslant a,\ 0 \leqslant \theta < 2\pi,\ dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\theta,$$

obținem

$$I = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a [\ln(\rho^2 + 3a^2) - \ln(3\rho^2 + a^2)]\,\rho\,d\rho +$$

$$+ \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \left(\frac{\rho^2 + a^2}{\rho^2 + 3a^2} - \frac{\rho^2 + a^2}{3\rho^2 + a^2}\right)\rho\,d\rho$$

sau

$$I = \frac{\pi}{4}(\rho^2 + 3a^2)\,[\ln(\rho^2 + 3a^2) - 1]\Big|_0^a -$$

$$- \frac{\pi}{12}(3\rho^2 + a^2)\,[\ln(3\rho^2 + a^2) - 1]\Big|_0^a +$$

$$+ \frac{\pi}{4}[\rho^2 - 2a^2 \ln(\rho^2 + 3a^2)]\Big|_0^a - \frac{\pi}{12}[\rho^2 - 2a^2 \ln(3\rho^2 + a^2)]\Big|_0^a,$$

deci

$$I = \frac{\pi}{4}a^2[2\ln 4a^2 - \ln 3a^2] - \frac{\pi}{12}a^2[2\ln 4a^2 - \ln a^2],$$

sau

$$I = \frac{\pi}{4}a^2 \ln\frac{16}{3}a^2 - \frac{\pi}{12}a^2 \ln 16\,a^2 = \frac{\pi}{12}a^2 \ln\left(\frac{16^2}{3^3}\,a^4\right).$$

10. Să se calculeze volumul paralelipipedului limitat de planele

$$a_i x + b_i y + c_i z = \pm h_i, \qquad i = 1,\ 2,\ 3.$$

R: Trebuie să cerem ca determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

să fie diferit de zero, pentru că în caz contrar, paralelipipedul nu este definit. Pentru $h_1h_2h_3 = 0$, volumul este nul; în această situație paralelipipedul degenerează într-un paralelogram, într-un segment sau un punct. Dacă presupunem $\Delta \neq 0$, atunci făcînd schimbarea de variabile

$$u_i = a_i x + b_i y + c_i z, \quad -h_i \leqslant u_i \leqslant h_i, \qquad i = 1, 2, 3,$$

obținem

$$\left|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \left|\frac{D(x,\,y,\,z,)}{D(u_1,\,u_2,\,u_3)}\right| \mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2\,\mathrm{d}u_3 = \frac{1}{|\Delta|}\,\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2\,\mathrm{d}u_3\right.$$

deci

$$V = \iiint_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{1}{|\Delta|}\int_{-h_1}^{h_1}\mathrm{d}u_1\int_{-h_2}^{h_2}\mathrm{d}u_2\int_{-h_3}^{h_3}\mathrm{d}u_3 = \frac{8h_1h_2h_3}{|\Delta|}\,.$$

11. Să se determine volumul corpului definit de

$$x^2 + y^2 \leqslant a^2z^2,\ x^2 + y^2 \geqslant b^2z^2,\ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2cz,\ b^2 > a^2,\ c > 0.$$

R: Să notăm $|a| = \operatorname{tg}\alpha$, $|b| = \operatorname{tg}\beta$ avem $\alpha < \beta$.
Dacă folosim coordonatele sferice, obținem

$$x = \rho\sin\theta\cos\varphi,$$

$$y = \rho\sin\theta\sin\varphi,$$

$$z = \rho\cos\theta,$$

iar V în noile coordonate este definit de $0 \leqslant \rho \leqslant 2a\cos a$, $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \rho^2\sin\theta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$,
de unde rezultă

$$V = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}\rho^2\sin\theta\,\mathrm{d}\rho = \frac{16\pi a^3}{3}\int_\alpha^\beta \cos^3\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta =$$

$$= \frac{4}{3}\pi a^3[\cos^4\alpha - \cos^4\beta]$$

însă

$$\operatorname{tg}\alpha = |a|;\ \cos^2\alpha = \frac{1}{1+a^2},\ \cos^2\beta = \frac{1}{1+b^2},$$

deci

$$V = \frac{4}{3}\pi a^3\,\frac{(b^2 + a^2 + 2)(b^2 - a^2)}{(1 + a^2)^2(1 + b^2)^2}\,.$$

12. Să se determine momentul de inerție a corpului Q de volum (V) și densitate $\rho(x, y, z)$ față de o dreaptă oarecare (d) care trece prin origine și face cu axele de coordonate unghiurile: α, β, γ (figura 40).

R: Dacă notăm cu δ distanța de la un punct $M(x, y, z)$ la dreapta (d) avem $\delta^2 = r^2 - d^2$ unde

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad d = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma.$$

Cum: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, obținem:

$$\delta^2 = x^2(\cos^2\beta + \cos^2\gamma) + y^2(\cos^2\gamma + \cos^2\alpha) + z^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta) -$$

$$- 2yz\cos\beta\cos\gamma - 2zx\cos\gamma\cos\alpha - 2xy\cos\alpha\cos\beta.$$

$$I_D = \iiint_V \delta^2 \rho(x, y, z)\ dx\ dy\ dz = I_{Ox} \cos^2\alpha + I_{Oy} \cos^2 \beta +$$

$$+ I_{Oz} \cos^2\gamma - 2K_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2K_{zx} \cos \gamma \cos\ \alpha - 2K_{xy} \cos \alpha \cos \beta$$

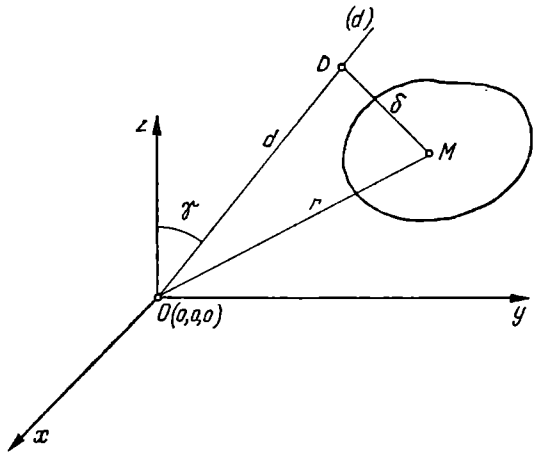

Fig. 40

unde

$$K_{yz} = \iiint_V yz\rho\ dx\ dy\ dz; \quad K_{zx} = \iiint_V zx\rho\ dx\ dy\ dz$$

$$K_{xy} = \iiint_V xy\rho\ dx\ dy\ dz.$$

13. Să se calculeze volumul corpului limitat de suprafaţa:

$\alpha^2(2x + 3y + 4z)^2 + \beta^2(x + 2y + 3z)^2 + \gamma^2(-3x + 4y + 5z)^2 = h^2$.

R: $V = \iiint_\Omega dx\ dy\ dz$.

Facem schimbarea

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = u \\ x + 2y + 3z = v \\ -3x + 4y + 5z = w \end{cases}$$

$$dx\ dy\ dz = \left|\frac{\partial(x, y, z)}{D(u, v, w)}\right| du\ dv\ dw = \frac{1}{\left|\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)}\right|} du\ dv\ dw =$$

$$= \frac{1}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}} du\ dv\ dw = \frac{1}{6} du\ dv\ dw$$

$$V = \frac{1}{6}\iiint_{\Omega'} du\, dv\, dw, \text{ unde } \Omega' \text{ este } \alpha^2u^2 + \beta^2v^2 + \gamma^2w^2 \leqslant h^2.$$

Cu schimbarea

$$u = \frac{h}{\alpha} r \sin\theta \cos\varphi$$

$$v = \frac{h}{\beta} r \sin\theta \sin\varphi$$

$$w = \frac{h}{\gamma} r \cos\theta$$

$$du\, dv\, dw = \frac{h^3}{\alpha\beta\gamma} r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi.$$

$$V = \frac{h^3}{6\alpha\beta\gamma}\int_0^1 r^2\, dr \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4\pi h^3}{6\alpha\beta\gamma}.$$

14. Să se calculeze integrala:

$$I = \iiint_{\Omega} \frac{dx\, dy\, dz}{1 - \cos x \cos y \cos z},$$

unde Ω este domeniul $0 < x < \pi$, $0 < y < \pi$, $0 < z < \pi$.

R: Facem schimbarea de variabile

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = u, \quad \operatorname{tg}\frac{y}{2} = v, \quad \operatorname{tg}\frac{z}{2} = w$$

care duce $(0, \pi)\times(0, \pi)\times(0, \pi)$ în $(0, \infty)\times(0, \infty)\times(0, \infty)$.
Avem

$$\frac{dx}{2} = \frac{du}{1 + u^2}, \quad \cos x = \frac{1 - u^2}{1 + u^2} \text{ etc., deci}$$

$$\left|\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}\right| = \frac{8}{(1 + u^2)(1 + v^2)(1 + w^2)}.$$

Cu această schimbare, integrala devine:

$$I = \iiint_{\Omega'} \frac{8\, du\, dv\, dw}{(1 + u^2)(1 + v^2)(1 + w^2) - (1 - u^2)(1 - v^2)(1 - w^2)},$$

unde Ω' este definit prin: $0 < u < \infty$, $0 < v < \infty$, $0 < w < \infty$.

Trecem în coordonate sferice:

$$\begin{cases} u = r \sin\theta \cos\varphi \\ v = r \sin\theta \sin\varphi \\ w = r \cos\theta \end{cases}$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, $0 < \rho < \infty$. Obţinem

$$\left| \frac{D(u, v, w)}{D(r, \theta, \varphi)} \right| = r^2 \sin \theta,$$

şi

$$(1 + u^2)(1 + v^2)(1 + w^2) - (1 - u^2)(1 - v^2)(1 - w^2) =$$
$$= 2(u^2 + v^2 + w^2) + 2u^2v^2w^2 = 2r^2 + 2r^6 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \sin^4 \theta \cos^2 \theta$$

$$I = 4 \iiint_{\Omega''} \frac{\sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi}{1 + r^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \cos^2 \theta \sin^4 \theta}$$

unde Ω'' este definit de $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $0 < r < \infty$.

Obţinem:

$$I = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \, d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\infty} \frac{dr}{1 + \lambda r^4} \text{ cu}$$

$$\lambda = \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \cos^2 \theta \sin^4 \theta.$$

Schimbarea de variabilă $\lambda r^4 = s$ arată că

$$\int_0^{\infty} \frac{dr}{1 + \lambda r^4} = \frac{1}{4\lambda^{\frac{1}{4}}} B\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4\lambda^{\frac{1}{4}}} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$$

Deci:

$$I = \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin \varphi \cos \varphi}}$$

Integrala $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta}}$ se calculează punînd $\cos^2 \theta = t$. Obţinem:

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{-\frac{3}{4}} (1 - t)^{-\frac{1}{2}} \, dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}.$$

Luînd 2φ ca variabilă, se găseşte $I_2 = \sqrt{2} \, I_1$. În final.

$$I = \frac{1}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$I = \frac{1}{4} \left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^4$$

15. Să se calculeze

$$\iiint_V \frac{z\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,(x^2+y^2+z^2+a^2)^3}$$

unde V este semispațiul $z \geqslant 0$.

R: Trebuie să arătăm mai întîi că integrala are sens. Observăm că integrantul este nemărginit în V, însă într-o vecinătate a lui $(0, 0, 0)$

$$\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,(x^2+y^2+z^2+a^2)^3} \leqslant \frac{M}{a^6\,(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

și $\frac{1}{2} < \frac{3}{2}$; avem și

$$\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,(x^2+y^2+z^2+a^2)^3} \leqslant \frac{M'}{(x^2+y^2+z^2+a^2)^3}$$

pentru $x^2+y^2+z^2$ oricît de mare și pentru $3 > \frac{3}{2}$, **rezultă că integrala are sens.** Parcurgem domeniul V dacă punem

$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi,$$

$$y = \rho \sin\theta \sin\varphi,$$

$$z = \rho \cos\theta$$

cu $0 \leqslant \rho < \infty$, $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Cu

$$dx\,dy\,dz = \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi,$$

obținem

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\infty} \frac{\rho^3 \sin\theta \cos\theta\, d\rho}{\rho(\rho^2+a^2)^3}$$

sau

$$I = \pi \int_0^{\infty} \frac{\rho^2\, d\rho}{(\rho^2+a^2)^3}.$$

Să punem

$$\rho = u,\ \frac{1}{2}\,\frac{2\rho\, d\rho}{(\rho^2+a^2)^3} = dv,\ v = -\frac{1}{4}\,\frac{1}{(\rho^2+a^2)^2}$$

$$I = \left[-\frac{\pi}{4}\,\frac{\rho}{(\rho^2+a^2)^2}\right]_0^{\infty} + \frac{\pi}{4}\int_0^{\infty} \frac{d\rho}{(\rho^2+a^2)^2}$$

$$I = \frac{\pi}{4a^2}\int_0^\infty \frac{(\rho^2 + a^2 - \rho^2)}{(\rho^2 + a^2)^2}\,d\rho = \frac{\pi}{4a^2}\,\frac{1}{a}\,\text{arc tg}\,\frac{\rho}{a}\Big|_0^\infty -$$

$$-\frac{\pi}{4a^2}\int_0^\infty \frac{\rho^2\,d\rho}{(\rho^2 + a^2)^2}$$

$$I = \frac{\pi^2}{8}\,\frac{1}{a^2\cdot|a|} + \frac{\pi}{8a^2}\left[\frac{\rho}{\rho^2 + a^2} - \frac{1}{a}\,\text{arc tg}\,\frac{\rho}{a}\right]_0^\infty$$

deci

$$I = \frac{\pi^2}{16}\,\frac{1}{|a|\cdot a^2}.$$

16. Să se determine momentul de inerție față de Oz al corpului omogen obținut prin rotația unui disc circular din planul yOz (figura 41) în jurul axei Oz

R: $I_z = 2\rho_0\int_0^a dz \iint\limits_{R_1^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant R_2^2} (x^2 + y^2)\,dx\,dy$

unde, cu notațiile din figura 41 avem

$$R_1 = d - \sqrt{a^2 - z^2},\quad R_2 = d + \sqrt{a^2 - z^2}.$$

Trecînd la coordonate polare: $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$

$$\iint\limits_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy = \iint\limits_{D'} \rho^3\,d\rho\,d\theta,$$

unde D' este $[R_1, R_2] \times [0, 2\pi]$

$$\iint\limits_{D'} \rho^3\,d\rho\,d\theta = 2\pi\,\frac{\rho^4}{4}\Big|_{R_1}^{R_2} = \frac{\pi}{2}\,(R_2^4 - R_1^4) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\,(R_2^2 - R_1^2)(R_2^2 + R_1^2) = 4\pi d\sqrt{a^2 - z^2}\,(d^2 + a^2 - z^2)$$

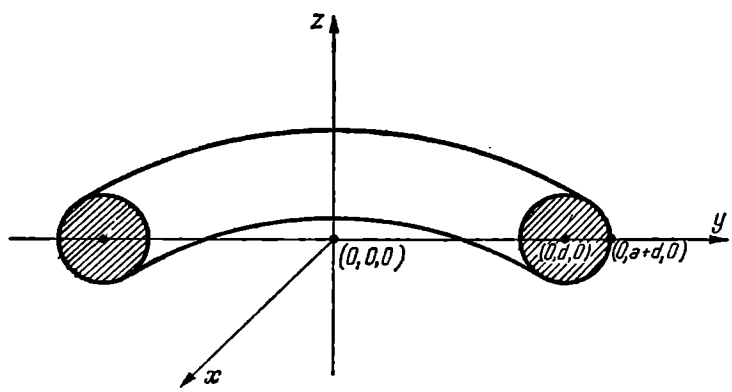

Fig. 41

deci,

$$I_z = 8\pi d\rho_0 \int_0^a \sqrt{a^2 - z^2}(d^2 + a^2 - z^2)\, dz$$

Punînd $z = a \sin t$, $dz = a \cos t\, dt$

$$I_z = 8\pi d\rho_0 a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t(d^2 + a^2 - a^2 \sin^2 t)\, dt =$$

$$= \frac{\pi^2}{2} \rho_0 d a^2(4d^2 + 3a^2).$$

17. Să se reducă la calculul unei integrale simple integrala

$$I = \iiint_{\Omega} f(ax + by + cz)\, dx\, dy\, dz,$$

unde Ω este volumul mărginit de sfera de centru $(0, 0, 0)$ şi raza unitate.

R: Dacă facem schimbarea de axe astfel ca faţă de sistemul $Ouvw$, planul $ax + by + cz = 0$ să devină planul $w = 0$, atunci cu

$$w = \frac{ax + by + cz}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

axele Ou, Ov sînt două drepte perpendiculare, situate în acest plan, iar w variază între -1 şi $+1$. Să luăm pe u şi v astfel încît

$$\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = 1$$

deci

$$I = \iiint_{\Omega'} f(hw)\, du\, dv\, dw, \quad h = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

unde Ω' este definit de $u^2 + v^2 + w^2 \leqslant 1$. Obţinem

$$I = \int_{-1}^{+1} f(hw)\, dw \iint_D du\, dv = \int_{-1}^{+1} (1 - w^2) f(hw)\, dw.$$

18. Se dă un cot de ţeavă omogen (figura 42). Să se calculeze:

a) poziţia centrului de greutate;

b) momentul de inerţie faţă de axa Oz.

R. a): Conform figurii 42, avem

$$x = (R + r \cos \varphi) \sin \psi, \quad y = (R + r \cos \varphi) \cos \psi,$$

$$z = r \sin \varphi$$

cu $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $-\alpha \leqslant \psi \leqslant \alpha$.

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, \psi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi \sin\psi - r\sin\varphi\sin\psi & (R + r\cos\varphi)\cos\psi \\ \cos\varphi\cos\psi - r\sin\varphi\cos\psi & -(R + r\cos\varphi)\sin\psi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \qquad\qquad 0 \end{vmatrix} =$$

$$= r(R + r\cos\varphi)$$

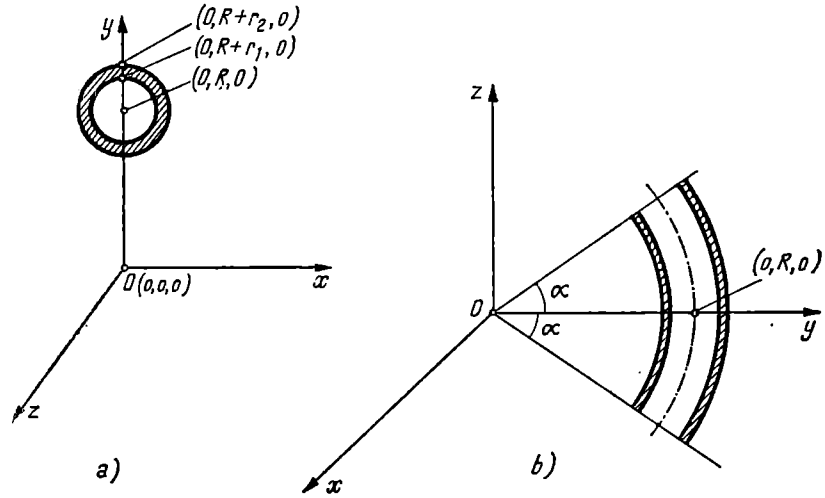

Fig. 42

deci

$$V = \rho\int_{r_1}^{r_2} dr\int_0^{2\pi} d\varphi\int_{-\alpha}^{\alpha} r(R + r\cos\varphi)\, d\psi = 2\alpha\pi\rho R(r_2^2 - r_1^2).$$

Din motive de simetrie, centrul se află pe axa Oy, deci $x_G = 0$, $z_G = 0$ şi

$$y_G = \frac{1}{2\pi\alpha R(r_2^2 - r_1^2)}\int_{r_1}^{r_2} r\, dr\int_0^{2\pi} d\varphi\int_{-\alpha}^{\alpha} (R + r\cos\varphi)^2\cos\psi\, d\psi$$

$$y_G = \frac{\sin\alpha}{\alpha}\left(R + \frac{r_1^2 + r_2^2}{4R}\right)$$

b) Avem

$$I_{Oz} = \rho\iiint_V (x^2 + y^2)\, dv = \rho\int_{r_1}^{r_2} r\, dr\int_0^{2\pi} d\varphi\int_{-\alpha}^{\alpha} (R + r\cos\alpha)^3\, d\psi$$

$$I_{Oz} = 2\pi\alpha\rho\, R(r_2^2 - r_1^2)\left[R^2 + \frac{3}{4}(r_1^2 + r_2^2)\right].$$

Am notat cu ρ densitatea materialului, presupusă constantă.

19. Se consideră integrala triplă

$$I = \iiint_{\Omega} \frac{dx\, dy\, dz}{1 + x^{\alpha} + y^{\beta} + z^{\gamma}} \cdot$$

unde Ω este domeniul $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

Pentru ce valori $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ converge această integrală?

R: Facem schimbarea de variabile:

$$x^{\alpha} = u^2, \quad y^{\beta} = v^2, \quad z^{\gamma} = w^2$$

$$\left| \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \right| = 8 \frac{u^{\frac{2}{\alpha} - 1} v^{\frac{2}{\beta} - 1} w^{\frac{2}{\gamma} - 1}}{\alpha\beta\gamma} \cdot$$

de unde

$$I = \frac{8}{\alpha\beta\gamma} \iiint_{\Omega} \frac{u^{\frac{2}{\alpha} - 1} v^{\frac{2}{\beta} - 1} w^{\frac{2}{\gamma} - 1}}{1 + u^2 + v^2 + w^2} du\, dv\, dw$$

Ω fiind domeniul $(u > 0, v > 0, w > 0)$

Să trecem la coordonatele sferice r, θ, φ, în spațiul u, v, w

$$u = r \sin\theta \cos\varphi,$$

$$v = r \sin\theta \sin\varphi,$$

$$w = r \cos\theta,$$

$$0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant r < \infty$$

$$I = \frac{8}{\alpha\beta\gamma} \iiint_{\Omega} \frac{r^{2\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right) - 3}}{1 + r^2} (\sin\theta)^{\frac{2}{\alpha} - 1} (\cos\varphi)^{\frac{2}{\alpha} - 1} (\sin\theta)^{\frac{2}{\beta} - 1} \cdot$$

$$\cdot (\sin\varphi)^{\frac{2}{\beta} - 1} \cdot (\cos\theta)^{\frac{2}{\gamma} - 1} r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= \frac{8}{\alpha\beta\gamma} \int_0^{\infty} \frac{r^{2\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right) - 1}}{1 + r^2} dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{\frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} - 1} (\cos\theta)^{\frac{2}{\gamma} - 1} d\theta \cdot$$

$$\cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi)^{\frac{2}{\alpha} - 1} (\sin\varphi)^{\frac{2}{\beta} - 1} d\varphi.$$

Se știe că dacă $p > 0$, $q > 0$ și punem $t = \frac{s}{1 + s}$,

atunci

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1 - t)^{q-1}\, dt = \int_0^{\infty} \frac{s^{p-1}}{(1 + s)^{p+q}} ds,$$

unde $B(p, q)$ este funcția β de speța întîi a lui Euler; avem și

$$B(p, q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta \, d\theta.$$

Dacă punem $r^2 = s$, se găsește:

$$\int_0^\infty \frac{r^{2\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)-1}}{1+r^2} dr = \frac{1}{2} B\left[\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}, 1 - \right.$$

$$\left. -\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\right] = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\cdot\Gamma\left[1 - \right.$$

$$\left. -\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\right]$$

cu condiția:

$$0 < \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma} < 1$$

$$\gamma > 0, \ \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} > 0, \ \alpha > 0, \ \beta > 0.$$

De aici rezultă

$$\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0; \ \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma} < 1$$

deci

$$\alpha > 1, \quad \beta > 1, \quad \gamma > 1.$$

20. Să se calculeze integrala

$$\int_1^\infty dz \int_1^\infty y \, dy \int_0^{\frac{1}{yz}} e^{xyz} x^2 \, dx.$$

R: Se poate scrie:

$$I = \iiint_V e^{xyz} x^2 y \, dx \, dy \, dz,$$

unde

$$V : x \geqslant 0, \ y \geqslant 1, \ z \geqslant 1, \ xyz \leqslant 1.$$

Facem schimbarea de variabile:

$$x = u; \ v = xy - x; \ w = xyz - xy$$

sau

$$x = u; \quad y = \frac{u+v}{u}; \; z = \frac{u+v+w}{u+v}$$

$$\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{v}{u^2} & \frac{1}{u} & 0 \\ -\frac{w}{(u+v)^2} & \frac{w}{(u+v)^2} & \frac{1}{u+v} \end{vmatrix} = \frac{1}{u(u+v)}.$$

Integrala se transformă în:

$$\iiint\limits_{\substack{u, v, w \geqslant 0 \\ u+v+w \leqslant 1}} e^{u+v+w} \, du \, dv \, dw =$$

$$= \int_0^1 e^u \, du \int_0^{1-u} e^v \, dv \int_0^{1-u-v} e^w \, dw = \int_0^1 du \int_0^{1-u} (e - e^{u+v}) \, dv =$$

$$= \int_0^1 (e^u - ue) \, du = \left(e^u - e\frac{u^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{e}{2} - 1 \cdot$$

21. Să se determine atracția pe care o exercită punctul $A(0, 0, 0)$ de masă unitate asupra sferei $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$.

R: Componenta atracției după axa Oz este dată de

$$F_z = \iiint\limits_{(V)} \frac{\rho(z-a)}{[x^2 + y^2 + (z-a)^2]^{3/2}} \, dx \, dy \, dz =$$

$$= \rho \int_{-R}^{R} (z-a) \, dz \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant R^2 - z^2} \frac{dx \, dy}{[x^2 + y^2 + (z-a)^2]^{3/2}}$$

cu ρ = constantă. Avem

$$I = \iint\limits_{x^2 y^2 \leqslant R^2 - z^2} \frac{dx \, dy}{[x^2 + y^2 + (z-a)^2]^{3/2}} =$$

$$= \iint\limits_{D'} \frac{r \, dr \, d\theta}{[r^2 + (z-a)^2]^{3/2}} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} \frac{r \, dr}{[r^2 + (z-a)^2]^{3/2}} =$$

$$= -2\pi [r^2 + (z-a^2)]^{-\frac{1}{2}} \Big|_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} =$$

$$= \frac{2\pi}{|z-a|} - \frac{2\pi}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2az}} \cdot$$

Cu aceasta,

$$F_z = \int_{-R}^{R} \left[\frac{z-a}{|z-a|} - \frac{z-a}{\sqrt{R^2+a^2-2az}} \right] dz =$$

$$= \int_{-R}^{R} \operatorname{sgn}(z-a)\, dz + \frac{1}{2a^2} \int_{R+a}^{|R-a|} (R^2 - t^2 - a^2)\, dt =$$

$$= \begin{cases} -2R + \frac{2}{3}\frac{R^3}{a^2} - 2R, & a \geqslant R \\ -2a - \frac{4}{3}a, & a < R \end{cases}$$

Obținem astfel:

$$F_z = \begin{cases} -\frac{4}{3}\pi\rho\frac{R^3}{a^2}, & a \geqslant R \\ -\frac{4}{3}\pi a\rho, & a < R \end{cases}$$

Din considerente de simetrie, $F_x = F_y = 0$, iar atracția este îndreptată spre centrul sferei.

22. Să se determine valorile lui p pentru care integrala

$$\iiint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1,\ |y|\leqslant 1 \\ |z|\leqslant 1}} \frac{dx\, dy\, dz}{|x+y-z|^p}, \quad p \in R$$

este convergentă și în acest caz, să se calculeze.

R:

$$|x+y-z| = \begin{cases} x+y-z, & x+y-z > 0, \\ -x-y+z, & x+y-z < 0. \end{cases}$$

Putem scrie

$$I = \iiint\limits_{V} = \iiint\limits_{V_1} + \iiint\limits_{V_2}$$

unde

$$V_1 : -1 \leqslant z < x+y, \qquad |x| \leqslant 1,$$

$$V_2 : x+y < z \leqslant 1, \qquad |x| \leqslant 1;$$

$$\iiint_{V_1} \frac{dx\,dy\,dz}{(x+y-z)^p} = \iint_{D_1} dx\,dy \int_{-1}^{x+y} (x+y-z)^{-p}\,dz =$$

$$= -\iint_{D_1} \frac{(x+y-z)^{-p+1}}{1-p}\Big|_{z=-1}^{z=x+y} dx\,dy =$$

$$= +\iint_{D_1} \frac{(x+y+1)^{-p+1}}{1-p}\,dx\,dy\,.$$

Punem condiția ca $\lim\limits_{z\to x+y} (x+y-z)^{-p+1}$ = finită, adică $-p+1 \geqslant 0$ $p \leqslant 1$;

dar pentru $p = 1$, integrala este divergentă, deci $p < 1$

$$D_1 : x+y > 0\,;\ |x| \leqslant 1$$

și

$$\frac{1}{1-p} \iint_{D_1} (x+y+1)^{1-p}\,dx\,dy \frac{1}{1-p} \int_{-1}^{1} dx \int_{-x}^{1} (x+y+1)^{1-p}\,dy =$$

$$= \frac{1}{1-p} \int_{-1}^{1} \frac{(x+y+1)^{2-p}}{2-p}\Big|_{y=-x}^{y=1} dx =$$

$$= \frac{1}{(1-p)(2-p)} \int_{-1}^{1} [(x+2)^{2-p} - 1]\,dx =$$

$$= \left[\frac{1}{(1-p)(2-p)(3-p)} (x+2)^{3-p} - \frac{x}{(1-p)(2-p)} \right]_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{1}{(1-p)(2-p)(3-p)} 3^{3-p} - \frac{2}{(1-p)(2-p)} - \frac{1}{(1-p)(2-p)(3-p)}$$

$$\iiint_{V_2} dx\,dy\,dz = \iint_{D_2} dx\,dy \int_{x+y}^{1} \frac{dz}{(z-x-y)^p} =$$

$$= \iint_{D_2} \frac{(z-x-y)^{1-p}}{1-p}\Big|_{z=x+y}^{z=1} dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{1-p} \iint_{D_2} (1-x-y)^{1-p}\,dx\,dy,$$

$$p < 1$$

unde

$$D_2 : x+y < 0,\ |x| \leqslant 1.$$

$$\frac{1}{1-p}\iint\limits_{D_3}(1-x-y)^{1-p}\,dx\,dy=\frac{1}{1-p}\int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{-x}(1-x-y)^{1-p}\,dy=$$

$$=\frac{1}{1-p}\int_{-1}^{1}-\frac{(1-x-y)^{2-p}}{2-p}\Bigg|_{y=-1}^{y=-x}dx=$$

$$=\frac{1}{(1-p)(2-p)}\int_{-1}^{1}[(2-x)^{2-p}-1]\,dx=$$

$$=\frac{-(2-x)^{3-p}}{(1-p)(2-p)(3-p)}\Bigg|_{x=-1}^{x=1}-\frac{2}{(1-p)(2-p)}=$$

$$=\frac{-1}{(1-p)(2-p)(3-p)}+\frac{3^{3-p}}{(1-p)(2-p)(3-p)}-\frac{2}{(1-p)(2-p)}$$

$p<1$

$$I=\frac{2(2p-7+3^{3-p})}{(1-p)(2-p)(3-p)}.$$

23. Să se determine volumul corpului:

$$\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}\right]^3+\left(\frac{z}{c}\right)^2\leqslant 1.$$

R: Trecem la coordonatele polare generalizate

$$\begin{cases}x=a\rho\sin\theta\cos^3\varphi,\\ y=b\rho\sin\theta\sin^3\varphi,\\ z=c\rho\cos\theta,\end{cases}\qquad \rho\in[0,1],\ \theta\in[0,\pi],\ \varphi\in[0,2\pi]$$

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)}=abc\begin{vmatrix}\sin\theta\cos^3\varphi & \rho\cos\theta\cos^3\varphi & -3\rho\sin\theta\cos^2\varphi\sin\varphi\\ \sin\theta\sin^3\varphi & \rho\cos\theta\sin^3\varphi & 3\rho\sin\theta\sin^2\varphi\cos\varphi\\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0\end{vmatrix}=$$

$$=3\,abc\,\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi\sin\theta\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi\\ \cos\theta & -\sin\theta & 0\end{vmatrix}=$$

$$=3\,abc\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi\sin\theta,$$

$$V=\iiint\limits_V dx\,dy\,dz=3abc\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^1\rho^2\,d\rho=\frac{\pi abc}{2}.$$

FORMULE INTEGRALE

1. Să se calculeze integrala curbilinie

$$\int_{\widehat{ABCA}} \overline{F}\, d\bar{r} = \int_{\widehat{ABAC}} (z - y)\, dx + (x - z)\, dy + (y - x)\, dz,$$

$$\overline{F}(x, y, z) = (z - y,\ x - z,\ y - x)$$

luată de-a lungul laturilor triunghiului $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ și $C(0, 0, c)$, apoi transformînd-o într-o integrală de suprafață.

R: Conform figurii 43, avem

$$I = \int_{AB} \overline{F}\, d\bar{r} + \int_{BC} \overline{F}\, d\bar{r} + \int_{CA} \overline{F}\, d\bar{r}$$

pe $AB : z = 0,\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0,$

pe $BC : x = 0,\ \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0,$

pe $CA : y = 0,\ \frac{z}{c} + \frac{x}{a} - 1 = 0,$

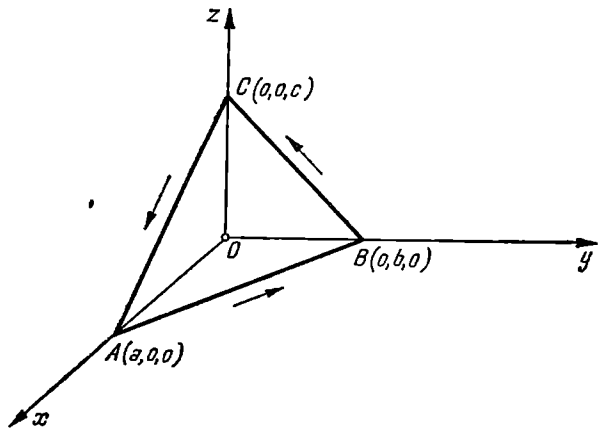

Fig. 43

deci

$$\int_{AB} \bar{F}\, d\bar{r} = \int_{AB} (-y\, dx + x\, dy) = ab,$$

$$\int_{BC} \bar{F}\, d\bar{r} = \int_{BC} (-z\, dy + y\, dz) = bc,$$

$$\int_{CA} \bar{F}\, d\bar{r} = \int_{CA} (z\, dx - x\, dz) = ca,$$

deci $I = ab + bc + ca$. Transformînd-o într-o integrală de suprafață avem

$$I = 2\int_S (\alpha + \beta + \gamma)\, d\sigma, \quad S : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

normala la planul ABC de ecuație $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, fiind dirijată spre exteriorul tetraedrului $OABC$ deci

$$\alpha = \frac{bc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}, \quad \beta = \frac{ca}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}, \quad \gamma = \frac{ab}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$$

dacă punem $x = u$, $y = v$, $z = c\left(1 - \frac{u}{a} - \frac{v}{b}\right)$

rezultă

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv = \frac{1}{2ab}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}\, du\, dv$$

și

$$I = \frac{2}{2ab}(ab + bc + ca)\iint_{OAB} du\, dv = ab + bc + ca.$$

2. Să se calculeze, folosind formula lui Stokes, integrala curbilinie

$$I = \oint_C y\, dx + z\, dy + x\, dz,$$

unde C este cercul de intersecție între sfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ și planul $x + y + z = 0$, parcurs în sens direct față de Ox.

R: Aplicăm formula lui Stokes, alegînd drept suprafață S partea din planul $x + y + z = 0$, decupată de sfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Normala la suprafața S în sensul lui Ox, are $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

O reprezentare parametrică a lui S este dată de

$$x = x,\ y = y,\ z = -x - y,\ d\sigma = \sqrt{3}\, dx\, dy,$$

deci

$$\oint_C y\, dx + z\, dy + x\, dz = -\iint_S dx\, dy + dy\, dz + dz\, dx = =$$

$$-\sqrt{3}\iint_S d\sigma = -3\iint_D dx\, dy,$$

unde D este proiecția cercului din enunț pe planul xOy. Această proiecție este elipsa $x^2 + y^2 + xy = \frac{1}{2}a^2$ sau

$$\left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = \frac{1}{2}a^2.$$

Punem

$$x + \frac{1}{2}y = \frac{1}{\sqrt{2}}au, \ \frac{\sqrt{3}}{2}y = \frac{1}{\sqrt{2}}av,$$

deci, $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{3}}a^2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$, și

$$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{\sqrt{3}}a^2$$

de unde deducem

$$\mathrm{I} = -\pi\sqrt{3}a^2.$$

3. Să se calculeze integrala $\oint_C \bar{V}\,\mathrm{d}\bar{r}$ unde

$$C \text{ este curba: } \begin{cases} x^2 + y^2 = 2x \quad \text{și} \quad \bar{V} = \dfrac{\bar{i}}{1+x^2} + \dfrac{y\bar{j}}{\sqrt{x}} + x\bar{k} \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

R: Aplicăm formula lui Stokes și,

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} + \frac{y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x}} + x\,\mathrm{d}z =$$

$$= -\iint_S \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + \frac{y}{2x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

unde S este partea din planul $x + y + z = 0$ interioară cilindrului $x^2 + y^2 = 2x$. Proiectînd pe planul xOy obținem $z = -x - y$ $\mathrm{d}\sigma = \sqrt{3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ deci:

$$\oint_C \bar{V}\,\mathrm{d}\bar{r} = -\iint_D \left[1 + \frac{y}{2x\sqrt{x}}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

D reprezintă proiecția lui S pe planul xOy și anume discul: $x^2 + y^2 \leqslant 2x$.

Alegem reprezentarea în coordonate polare

$$x = 1 + \rho\cos\theta, \ y = \rho\sin\theta, \ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta,$$

deci

$$D' : \{\, \rho \in [0, 1], \ \theta \in [0, 2\pi]. \,\}$$

Integrala devine

$$\oint_C \bar{V}\, d\bar{r} = -\iint_{D'}\left[\rho + \frac{\rho^2 \sin\theta}{2(1+\rho\cos\theta)^{3/2}}\right] d\rho\, d\theta =$$

$$= -\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho\, d\rho = -\pi.$$

4. Să se transforme integrala curbilinie

$$I = \oint_C xz\, dx + yz dy + z^2 dz$$

unde C este o curbă închisă, într-o integrală de suprafață. Să se arate că $I = 0$ dacă C este trasată pe o suprafață de rotație de axă Oz.

R: Pe o suprafață de rotație de axă Oz, $x^2 + y^2 = \varphi(z)$, normala la suprafață întîlnește axa Oz, condiție care se scrie $\beta x - \alpha y = 0$. În adevăr, dacă scriem $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - \varphi(z)$, atunci

$$\alpha = \frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \beta = \frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \gamma = \frac{\partial F}{\partial z} - \varphi'(z)$$

și avem efectiv $\alpha y = \beta x$.

Conform formulei lui Stokes

$$\int_C P\, dx + Q\, dy + R\, dz = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\, dz +$$

$$+ \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\, dx = \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\gamma\right] d\sigma$$

însă

$$P = xz, \quad Q = yz, \quad R = z^2,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = -y, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = x$$

și integrala de suprafață se scrie

$$I = \iint_S (\beta x - \alpha y)\, d\sigma = 0.$$

5. Să se calculeze integrala de suprafață

$$\iint_S (xy + z)\, dy\, dz + 2x dz dx + (x^2 - yz + x)\, dz,$$

unde S este fața exterioară a semisferei $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geqslant 0$, transformînd-o într-o integrală curbilinie pe cercul $x^2 + y^2 = R^2$, din planul xOy.

R: Dacă punem

$$X = xy + z,\ Y = 2x,\ Z = x^2 - yz + x,$$

avem

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = y - y = 0$$

deci poate fi transformata într-o integrală curbilinie de bordura lui S, anume pe cercul $x^2 + y^2 = R^2$, parcurs în sens direct (trigonometric). Trebuie să avem

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = x^2 - yz + x,\ \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = xy + z,\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 2x$$

o soluţie particulară a acestui sistem este dată de

$$P = -x^2y - xy,\ Q = -xyz - \frac{1}{2}z^2,\ R = -x^2,\ (x, y, z) \in R^3$$

obţinem deci

$$\mathrm{I} = -\oint_C xy(x+1)\,\mathrm{d}x + \left(xyz + \frac{1}{2}z^2\right)\mathrm{d}y + x^2\,\mathrm{d}z.$$

Cercul (C) are o reprezentare parametrică dată de

$$x = R\cos\theta,\ y = R\sin\theta,\ z = 0,\ \ 0 \leqslant \theta < 2\pi,$$

rezultă

$$\mathrm{I} = \int_0^{2\pi} R^3 \sin\theta\cos\theta\,(R\cos\theta + 1)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4}R^4.$$

6. Să se calculeze integrala de suprafaţă

$$\mathrm{I} = \iint_S x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

unde S este faţa exterioară a sferei $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ transformînd-o într-o integrală de volum.

R: Aplicînd formula Gauss-Ostrogradski

$$\iint_S P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

obţinem

$$\mathrm{I} = 2\iiint_V (x + y + z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

unde V este interiorul sferei din enunț. O reprezentare parametrică a lui V este dată de

$$x = a + \rho \sin\theta \cos\varphi,$$
$$y = b + \rho \sin\theta \sin\varphi,$$
$$z = c + \rho \cos\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi,$$

cu $dx\,dy\,dz = \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$; obținem

$$I = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{R} \rho^2[a + b + c + \rho(\sin\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi +$$
$$+ \cos\theta]\, d\rho = \frac{8\pi}{3} R^3(a + b + c).$$

7. Să se calculeze cu formula lui Gauss-Ostrogradski

$$\iint_S x\,dy\,dz + y dz\,dx + \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy,$$

unde S este suprafața paraboloidului $x^2 + y^2 = \frac{1}{4} - z$ cuprinsă între suprafețele $z = \sqrt{x^2+y^2}$, și $z = 2\sqrt{x^2+y^2}$ (figura 44).

R: Pentru a aplica formula lui Gauss -Ostrogradski completăm suprafața paraboloidului dintre cele 2 conuri cu suprafețele conurilor; obținem astfel o suprafață închisă.

Să notăm $S_1 : z = \sqrt{x^2+y^2}$, $S_2 : z = 2\sqrt{x^2+y^2}$

deci

$$I = \iint_{S^*} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy.$$

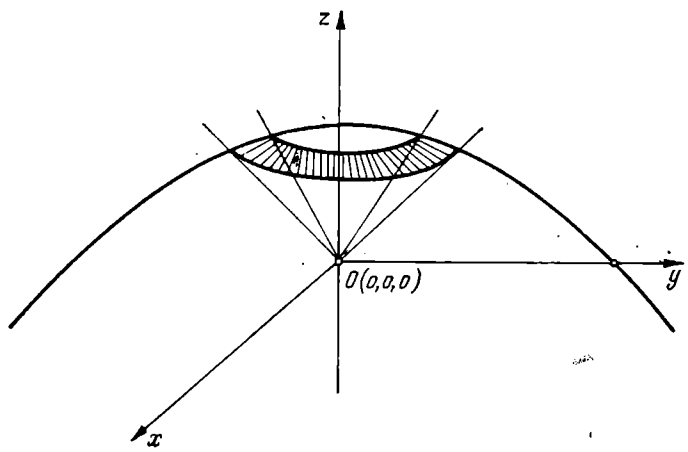

Fig. 44

unde

$$S^* = S \cup S_1 \cup S_2;\ \text{obținem}$$

$$I = 2\iiint_V dx\,dy\,dz \text{ cu } V \text{ definit de } x^2 + y^2 + z \leqslant \frac{1}{4} \text{ și}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant 2\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Observăm că pe suprafața $S_1 : z = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$\iint_{S_1} x dy dz + y dz dx + \sqrt{x^2 + y^2}\, dx dy =$$

$$= \iint_{D_1} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \sqrt{x^2 + y^2} \right) dx\,dy = 0.$$

pentru $S_2 : z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$

$$\iint_{S_2} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + \sqrt{x^2 + y^2}\,dx\,dy =$$

$$= \iint_{D_2} \left(\frac{2x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \sqrt{x^2 + y^2} \right) dx\,dy = \iint_{D_2} \sqrt{x^2 + y^2}\,dx\,dy,$$

unde $D_2 : x^2 + y^2 \leqslant (\sqrt{5} - 1)^2$, deci

$$\iint_{D_2} \sqrt{x^2 + y^2}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{5}-1} \rho^2\,d\rho = \frac{2\pi}{3}(\sqrt{5} - 1)^3.$$

Rămîne să mai calculăm

$$\iiint_V dx\,dy\,dz$$

Vom trece la coordonate sferice:

$$\begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\varphi \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi \\ z = \rho \cos\theta \end{cases}$$

$$\theta \in \left[\operatorname{arctg} \frac{1}{2}, \frac{\pi}{4} \right],\ \varphi \in [0, 2\pi],\ \rho \in \left[0, \frac{1 - \cos\theta}{2 \sin^2\theta} \right];$$

obținem

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta\,d\theta \int_0^{\frac{1-\cos\theta}{2\sin^2\theta}} d\rho = \frac{\pi}{12} \int_{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1 - \cos\theta)^3}{\sin^6\theta} \sin\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{2\pi}{48} \int_{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta}{\cos^5\frac{\theta}{2}} = \frac{\pi}{96} \left[\frac{8}{3 + 2\sqrt{2}} - \frac{20}{9 + 4\sqrt{5}} \right].$$

8. Să se calculeze: $\iint\limits_S U\bar{n}\,\mathrm{d}\sigma$ unde S este faţa exterioară a suprafeţei paralelipipedului:

$$\begin{cases} 2x + y - z = \pm 1 \\ -x + 2y + z = \pm 1 \\ x - y + 2z = \pm 1 \end{cases}$$

iar

$$U(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

R: Deoarece S este o suprafaţă închisă, aplicăm formula integrală a gradientului. Obţinem:

$$\iint\limits_S U\bar{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iiint\limits_V \operatorname{grad} U\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

unde V este domeniul

$$\begin{cases} -1 \leqslant 2x + y - z \leqslant 1 \\ -1 \leqslant -x + 2y + z \leqslant 1 \\ -1 \leqslant x - y + 2z \leqslant 1 \end{cases}$$

Facem schimbarea de variabile $u = 2x + y - z$,

$$v = -x + 2y + z, \quad w = x - y + 2z$$

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{1}{\left|\frac{\mathrm{D}(u, v, w)}{\mathrm{D}(x, y, z)}\right|}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w = \frac{1}{14}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$$

$$\operatorname{grad} U = 2x\bar{i} + 2y\bar{j} + 2z\bar{k} = \frac{1}{7}\left[u(5\bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k}) + v(-\bar{i} + 5\bar{j} + 3\bar{k}) + \right.$$

$$\left. + w(3\bar{i} - \bar{j} + 5\bar{k})\right];$$

obţinem astfel

$$\iiint\limits_V \operatorname{grad} U\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z =$$

$$= \frac{1}{98}\iiint\limits_{V'}\left[u(5\bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k}) + v(-\bar{i} + 5\bar{j} + 3\bar{k}) + \right.$$

$$\left. + w(3\bar{i} - \bar{j} + 5\bar{k})\right]\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w = 0.$$

CAPITOLUL XIII

INTEGRALE MULTIPLE

1. Să se calculeze volumul paralelipipedului din R^n, definit de

$$(v) \qquad -h_k \leqslant a_{1k}x_1 + a_{2k}x_2 + \ldots + a_{nk}x_n \leqslant h_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

R: În urma schimbării de variabile

$$u_k = a_{1k}x_1 + a_{2k}x_2 + \ldots + a_{nk}x_n, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

paralelipipedul din enunț se transformă în

$$(v') \qquad -h_k \leqslant u_k \leqslant h_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

Volumul cerut este dat de

$$V = \iint\limits_V \cdots \int\limits_V \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n = \iint\limits_{V'} \cdots \int\limits_{V'} \left| \frac{\mathrm{D}(x_1, \ldots, x_n)}{\mathrm{D}(u_1, \ldots, u_n)} \right| \mathrm{d}u_1 \ldots \mathrm{d}u_n$$

avem însă

$$\frac{\mathrm{D}(x_1, \ldots, x_n)}{\mathrm{D}(u_1, \ldots, u_n)} = \left[\frac{\mathrm{D}(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{\mathrm{D}(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \right]^{-1} = \frac{1}{\Delta},$$

unde

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

obținem

$$V = \frac{1}{\Delta} \int_{-h_1}^{h_1} \mathrm{d}u_1 \int_{-h_2}^{h_2} \mathrm{d}u_2 \ldots \int_{-h_n}^{h_n} \mathrm{d}u_n = \frac{2^n}{\Delta} h_1 h_2 \ldots h_n.$$

2. Să se calculeze volumul tetraedrului din spațiul n-dimensional, definit de:

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0, \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant a, \quad a > 0.$$

R: Facem schimbarea de variabile:

$$u_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \quad u_2 = \frac{a(x_1 + \ldots + x_n)}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}$$

(1)

$$u_3 = \frac{a(x_3 + \ldots + x_n)}{x_2 + \ldots + x_n}, \ldots u_n = \frac{ax_n}{x_{n+1} + x_n}$$

$$u_1 \in [0,\ a], \ldots, u_n \in [0,\ a].$$

Observăm că $u_1, u_2, \ldots, u_n$ este soluția sistemului

$$\begin{aligned}
&F_1 \equiv u_1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_n = 0\\
&F_2 \equiv u_1 u_2 - a(x_2 + \ldots + x_n) = 0\\
&F_3 \equiv u_1 u_2 u_3 - a^2(x_3 + \ldots + x_n) = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&F_n \equiv u_1 u_2 \ldots u_n - a^{n-1} x_n = 0.
\end{aligned}$$

Ținînd seama de regula de calcul a determinantului funcțional al unei transformări compuse, avem:

$$\frac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)} = \frac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} \cdot \frac{D(x_1, \ldots, x_n)}{D(u_1, \ldots, u_n)}$$

dar:

$$\frac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(u_1, \ldots, u_n)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ u_2 & u_1 & 0 \ldots\ldots\ldots & 0 \\ u_2 u_3 & u_1 u_3 & u_1 u_2 \quad \ldots\ldots\ldots & 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ u_2 \ldots u_n, & \ldots & u_1 u_2 \ldots u_{n-1} & \end{vmatrix} = u_1^{n-1} u_2^{n-2} \ldots u_{n-1}$$

$$\frac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & \ldots\ldots\ldots\ldots & -1 \\ 0 & -a & -a \ldots\ldots\ldots & -a \\ 0 & 0 & -a^2 \ldots\ldots\ldots & -a^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ 0 & 0 & 0 \ldots\ldots\ldots & -a^{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^n a^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

deci

$$\frac{D(x_1, \ldots, x_n)}{D(u_1, \ldots, u_n)} = \frac{(-1)^n u_1^{n-1} u_2^{n-2} \ldots u_{n-1}}{n^{\frac{n(n-1)}{2}}}.$$

Volumul tetraedrului devine:

$$V = a^{\frac{-n(n-1)}{2}} \int_0^a u_1^{n-1}\,du_1 \int_0^a u_2^{n-2}\,du_2 \ldots \int_0^a u_{n-1}\,du_{n-1} \int_0^a du_n =$$

$$= a^{\frac{-n(n-1)}{2}} \frac{a^{n+(n-1)+\ldots+2}}{n!} = \frac{a^{\frac{-n(n-1)}{2}} \cdot a^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n!}$$

sau

$$V = \frac{a^n}{n!}.$$

3. Să se calculeze volumul sferei n-dimensionale

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant R^2$$

R: *Metoda I.* Trecem la coordonate polare generalizate:

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1 = r\cos\varphi_1, \\ x_2 = r\sin\varphi_1\cos\varphi_2, \\ x_3 = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2 \ldots \sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1} \\ x_n = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2 \ldots \sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1} \end{cases}$$

$$0 \leqslant r \leqslant R, \quad 0 \leqslant \varphi_1 \leqslant \pi, \ldots, 0 \leqslant \varphi_{n-2} \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi_{n-1} \leqslant 2\pi.$$

Pentru calculul iacobianului transformării, considerăm sistemul:

$$\begin{cases} F_1 \equiv r^2 - (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) = 0 \\ F_2 \equiv r^2\sin^2\varphi_1 - (x_2^2 + \ldots + x_n^2) = 0 \\ F_3 \equiv r^2\sin^2\varphi_1\sin^2\varphi_2 - (x_3^2 + \ldots + x_n^2) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n \equiv r^2\sin^2\varphi_1 \ldots \sin^2\varphi_{n-1} - x_n^2 = 0. \end{cases}$$

Soluția acestui sistem este transformarea (1). Din regula de calcul a determinantului funcțional al unei transformări compuse, rezultă:

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})} = \frac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} \cdot \frac{D(x_1, \ldots, x_n)}{D(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})}$$

deci,

$$\frac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2r & 0 & \ldots & 0 \\ 2r\sin^2\varphi_1 & r^2\cos 2\varphi_1 & \ldots & 0 \\ 2r\sin^2\varphi_1\sin^2\varphi_2 & r^2\cos 2\varphi_1\sin^2\varphi_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2r\sin^2\varphi_1 \ldots \sin^2\varphi_{n-1} & r^2\cos 2\varphi_1 \ldots \sin^2\varphi_{n-1} & \ldots & r^2\sin^2\varphi_1 \ldots \sin^2\varphi_{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= 2^n \cdot r^{2n-1}\sin^{2n-3}\varphi_1\cos\varphi_1\sin^{2n-5}\varphi_2\cos\varphi_2 \ldots \sin\varphi_{n-1}\cos\varphi_{n-1}$$

$$\frac{D(F_1, F_2, ..., F_n)}{D(x_1, x_2, ..., x_n)} = \begin{vmatrix} -2x_1 & -2x_2 & \dots & -2x_n \\ 0 & -2x_2 & \dots & -2x_n \\ 0 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & -2x_n \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^n 2\, x_1 \dots {}^n x_n =$$

$$(-1)^n 2^n r^n \sin^{n-1} \varphi_1 \cos \varphi_1 \sin^{n-2} \varphi_2 \cos \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-1} \cos \varphi_{n-1}.$$

Deci:

$$\left| \frac{D(x_1, ..., x_n)}{D(r, \varphi_1, ..., \varphi_{n-1})} \right| = r^{n-1} \sin^{n-2} \varphi_1 \sin^{n-3} \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-2}.$$

Cu aceasta volumul sferei n-dimensionale va fi dat de

$$V = \int_0^R r^{n-1}\, dr \int_0^\pi \sin^{n-2} \varphi_1\, d\varphi_1 \int_0^\pi \sin^{n-3} \varphi_2\, d\varphi_2 \dots \int_0^\pi \sin \varphi_{n-2}\, d\varphi_{n-2} \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi_{n-1}.$$

Calculînd aceste integrale, rezultă

$$V = \begin{cases} \dfrac{\pi^m}{m!} R^{2m}, & n = 2m \\ \dfrac{2(2\pi)^m}{(2m+1)!!} R^{2m+1}, & n = 2m+1. \end{cases}$$

Metoda II. Calculăm volumul sferei n-dimensionale de rază 1; descompunem integrala astfel:

$$V = \int_{-1}^{1} dx_n \underbrace{\iint \dots \int}_{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \leqslant 1 - x_n^2} dx_1\, dx_2 \dots dx_{n-1}.$$

Dar: $\underbrace{\iint \dots \int}_{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \leqslant 1 - x_n^2} dx_1 \dots dx_{n-1}$ este volumul sferei $(n-1)$ — dimensionale de rază $\sqrt{1 - x_n^2}$, deci este de forma $\alpha_{n-1}(1 - x_n^2)^{\frac{n-1}{2}}$, unde α_{n-1} este o constantă.

Folosind aceeași notație,

$$V = \alpha_n = \alpha_{n-1} \int_{-1}^{1} (1 - x_n^2)^{\frac{n-1}{2}}\, dx_n = 2\alpha_{n-1} \int_0^1 (1 - x_n^2)^{\frac{n-1}{2}}\, dx_n.$$

Luînd $x_n = \cos t$, $\alpha_n = 2\alpha_{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\, dt$

și:

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} \sqrt{\pi};$$

aplicînd această relație de recurență, rezultă

$$\alpha_n = \frac{(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

4. Să se calculeze volumul conului n—dimensional limitat de suprafețele:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \ldots + \frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2} = \frac{x_n^2}{a_n^2}, \quad x_n = a_n, \quad x_n \geqslant 0.$$

R: Volumul este dat de

$$V_n = \overbrace{\iint \cdots \int}^{n-1 \text{ ori}}_{V_{n-1}} \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_{n-1} \int_{b_n}^{a_n} \mathrm{d}x_n$$

cu V_{n-1} dat de

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \ldots + \frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2} \leqslant 1 \text{ și } b_n = a_n \sqrt{\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \ldots + \frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2}}$$

deci

$$V_n = a_n \int \cdots \int_{V_{n-1}} \left(1 - \sqrt{\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \ldots + \frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2}}\right) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_{n-1}.$$

Facem schimbarea de variabile:

$$\begin{cases} x_1 = a_1 \, r \cos\varphi_1 \\ x_2 = a_2 \, r \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} = a_{n-1} \, r \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \ldots \sin\varphi_{n-2} \end{cases}$$

$$r \in [0, 1], \quad \varphi_1 \in [0, \pi], \ldots, \varphi_{n-3} \in [0, \pi], \quad \varphi_{n-2} \in [0, 2\pi].$$

Din exercițiul 3 rezultă că

$$\left| \frac{\mathrm{D}(x_1, \ldots, x_{n-1})}{\mathrm{D}(r, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-2})} \right| = a_1 a_2 \ldots a_{n-1} \, r^{n-2} \sin^{n-3}\varphi_1 \sin^{n-4}\varphi_2 \ldots \sin\varphi_{n-3}.$$

Cu această schimbare, integrala devine:

$$V_n = a_1 a_2 \dots a_n \int_0^{\pi} \sin^{n-3} \varphi_1 \, d\varphi_1 \int_0^{\pi} \sin^{n-4} \varphi_2 \, d\varphi_2 \dots \int_0^{\pi} \sin \varphi_{n-3} \, d\varphi_{n-3}$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi_{n-2} \int_0^1 r^{n-2}(1 - r) \, dr =$$

$$= 2\pi a_1 a_2 \dots a_n \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \int_0^{\pi} \sin^{n-3} \varphi_1 \, d\varphi_1 \int_0^{\pi} \sin^{n-4} \varphi_2 \, d\varphi_2 \dots$$

$$\dots \int_0^{\pi} \sin \varphi_{n-3} \, d\varphi_{n-3}$$

dar:

$$I_n = \int_0^{\pi} \sin^n \theta \, d\theta = - \sin^{n-1} \theta \cos \theta \Big|_0^{\pi} + (n - 1) \int_0^{\pi} \sin^{n-2} \theta \cos^2 \theta \, d\theta$$

de aici rezultă relaţia de recurenţă:

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}, \text{ de unde } I_n = \frac{2}{n};$$

înlocuind în expresia lui V_n, obţinem:

$$V_n = 2\pi a_1 \dots a_n \frac{1}{n(n-1)} \cdot \frac{2}{n-3} \cdot \frac{2}{n-4} \cdot \dots \cdot \frac{2}{1} =$$

$$= \pi a_1 \dots a_n \cdot \frac{2^{n-2}(n-2)}{n!}.$$

5. Să se demonstreze formula lui Dirichlet

$$I_n = \iint_D \dots \int x_1^{p_1 - 1} \, x_2^{p_2 - 1} \dots x_n^{p_n - 1} \, dx_1 \, dx_2 \dots dx_n =$$

$$= \frac{\Gamma(p_1) \, \Gamma(p_2) \dots \Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1 + p_2 + \dots + p_n + 1)},$$

unde

$$D_n : x_1 \geqslant 0, \dots, x_n \geqslant 0, \quad x_1 + x_2 + \dots x_n \leqslant 1 \text{ şi } p_1, p_2, \dots, p_n > 0.$$

R: Formula este adevărată pentru $n = 2$. Folosind funcţia $\Gamma(x)$ avem:

$$\Gamma(p_1) = \int_0^{\infty} x_1^{p_1 - 1} e^{-x_1} \, dx_1, \quad \Gamma(p_2) = \int_0^{\infty} x_2^{p_2 - 1} \, e^{-x_2} \, dx_2$$

deci

$$\Gamma(p_1)\,\Gamma(p_2) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x_1-x_2} x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1}\, dx_1\, dx_2.$$

Să facem schimbarea de variabile

$$x_1 = u(1-v), \quad x_2 = uv, \quad \frac{D(x_1, x_2)}{D(u, v)} = u$$

și $(0, \infty) \times (0, \infty)$ se transformă în $(0, \infty) \times (0, 1)$, deci

$$\Gamma(p_1)\,\Gamma(p_2) = \int_0^1 dv \int_0^\infty e^{-u} u^{p_1+p_2-1} v^{p_1-1} (1-v)^{p_2-1}\, du =$$

$$= \int_0^\infty e^{-u} u^{p_1+p_2-1}\, du \int_0^1 v^{p_1-1}(1-v)^{p_2-1}\, dv =$$

$$= \Gamma(p_1+p_2) \int_0^1 v^{p_1-1}(1-v)^{p_2-1}\, dv =$$

$$= \Gamma(p_1+p_2)\ B(p_1, p_2).$$

B se numește funcția de speța întîi a lui Euler. Se exprimă cu ajutorul funcției Γ: $B(p_1, p_2) = \frac{\Gamma(p_1)\,\Gamma(p_2)}{\Gamma(p_1+p_2)}$. Avem așadar:

$$\iint_{D_2} x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1}\, dx_1\, dx_2 = \int_0^1 x_1^{p_1-1}\, dx_1 \int_0^{1-x_1} x_2^{p_2-1}\, dx_2 =$$

$$= \frac{1}{p_2} \int_0^1 x_1^{p_1-1} (1-x_1)^{p_2}\, dx_1 = \frac{1}{p^2} B(p_1, p_2+1) =$$

$$= \frac{1}{p_2}\ \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2+1)}{\Gamma(p_1+p_2+1)}\ \frac{\Gamma(p_1)\,\Gamma(p_2)}{\Gamma(p_1+p_2+1)}.$$

Presupunem formula adevărată pentru $n-1$. Avem

$$(\alpha) \qquad I_n = \int_0^1 x_n^{p_n-1}\, dx_n \int\cdots\int_{D'} x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \ldots x_{n-1}^{p_{n-1}-1}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-1}$$

cu D': $x_1 > 0, \quad x_2 > 0, \ldots, x_{n-1} > 0, \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} \leqslant 1 - x_n$.

unde facem schimbarea de variabile

$$x_1 = (1-x_n)\xi_1, \quad x_2 = (1-x_n)\xi_2, \ldots, x_{n-1} = (1-x_n)\xi_{n-1}$$

cu determinantul funcțional al transformării

$$\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})}{D(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1})} = (1-x_n)^{n-1};$$

integrala (α) se transformă în

$$\int_0^1 x_n^{p_n-1}(1-x_n)^{p_1+p_2+\ldots+p_{n-1}}\,dx_n \int\cdots\int_{D_{n-1}} \xi_1^{p_1-1}\ \xi_{n-1}^{p_{n-1}-1-1} d\xi_1 \ldots d\xi_{n-1} =$$

$$= \frac{\Gamma(p_1)\,\Gamma(p_2)\ldots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+p_2+\ldots+p_{n-1}+1)} \int_0^1 x_n^{p_n-1}(1-x_n)^{p_1+p_2+\ldots+p_{n-1}}\,dx_n$$

ultima integrală din partea a doua are valoarea

$$B(p\ ,\ p_1+p_2+\ldots+p_n) = \frac{\Gamma(p_n)\,\Gamma(p_1+p_2+\ldots+p_{n-1}+1)}{\Gamma(p_1+p_2+\ldots+p_n+1)}$$

şi sîntem astfel conduşi la formula din enunţ.

6. Să se calculeze:

$$I = \iint\cdots\int_{R^n} \frac{dx_1\,dx_2\ldots dx_n}{(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2+a^2)^\alpha}.$$

R: Trecem la coordonate polare generalizate $x_1 = r\cos\varphi_1$,

$$x_2 = r\sin\varphi_1\cos\varphi_2,\ \ldots,\ x_{n-1} = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdot\sin\varphi_{n-1}\cos\varphi_{n-1}$$

$$x_n = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2,\ \ldots,\ \sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}.$$

$$r\in[0,\ \infty),\ \varphi_1\in[0,\ \pi],\ \ldots\ \varphi_{n-2}\in[0,\ \pi],\ \varphi_{n-1}\in[0,\ 2\pi].$$

Am arătat că

$$\frac{D(x_1,\ldots,x_n)}{D(r,\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})} = r^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1\sin^{n-3}\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}$$

deci

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi_{n-1}\int_0^\pi \sin\varphi_{n-2}\,d\varphi_{n-2}\int_0^\pi \sin^2\varphi_{n-3}\,d\varphi_{n-3}\ldots$$

$$\ldots\int_0^\pi \sin^{n-2}\varphi_1\,d\varphi_1\cdot\int_0^\infty \frac{r^{n-1}dr}{(r^2+a^2)^\alpha}.$$

Integrala
$A = \int_0^\infty \frac{r^{n-1}\,dr}{(r^2+a^2)^\alpha}$ este convergentă pentru $2\alpha - n + 1 > 1$ sau $2\alpha > n$; pentru calculul ei facem schimbarea

$$\frac{r^2}{r^2+a^2} = t;\quad r^2(1-t) = a^2t;$$

$$r = a\,t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}};\quad t\in[0,\ 1],$$

deci

$$A = \frac{a^{n-2\alpha}}{2}\int_0^1 t^{\frac{n}{2}-1}(1-t)^{\alpha-\frac{n}{2}-1}\,dt.$$

Am obținut astfel o integrală Beta; condițiile ca ea să fie convergentă se reduc la $2\alpha > n$; urmează:

$$A = \frac{a^{n-2\alpha}}{2}\,B\left(\frac{n}{2},\quad \alpha-\frac{n}{2}\right),$$

ținînd seama că $\int_0^{\pi}\sin^n\varphi\,d\varphi = \frac{2}{n}$, obținem

$$I = \frac{n\pi^{n/2}\,a^{n-2\alpha}}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\,B\left(\frac{n}{2},\ \alpha-\frac{n}{2}\right),\quad 2\alpha > n.$$

7. Să se determine valorile lui α pentru care integrala

$$A = \iint\cdots\int_{\mathcal{V}_n}\frac{dx_1\,dx_2\ldots dx_n}{(1-x_1^2-x_2^2-\ldots-x_n^2)^{\alpha}},\quad n\in N$$

cu $\mathcal{V}_n$: $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\leqslant 1$, are sens și în acest caz, să se calculeze.

R: Facem trecerea la coordonate polare generalizate

$$x_1 = r\cos\varphi_1,\quad x_2 = r\sin\varphi_1\cos\varphi_2,\quad x_3 = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3,\ \ldots\ x_{n-1}=$$

$$= r\sin\varphi_1\ldots\sin\varphi_{n-1}\cos\varphi_{n-1},\quad x_n = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}\times$$

$$\times r\in[0,1],\quad \varphi_1\in[0,\pi],\ \ldots,\ \varphi_{n-2}\in[0,\pi],\quad \varphi_{n-1}\in[0,2\pi];\quad dx_1\ldots dx_n =$$

$$= r^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1\sin^{n-3}\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}\,dr\,d\varphi_1\ldots d\varphi_{n-1}.$$

Înlocuind în integrala dată, obținem:

$$A = \int_0^1\frac{r^{n-1}\,dr}{(1-r^2)^{\alpha}}\int_0^{\pi}\sin^{n-2}\varphi_1\,d\varphi_1\ldots\int_0^{\pi}\sin\varphi_{n-2}\,d\varphi_{n-2}\int_0^{2\pi}d\varphi_{n-1}.$$

Observăm că

$$I = \int_0^1\frac{r^{n-1}\,dr}{(1-r^2)^{\alpha}}$$

este o integrală improprie pentru $r=1$ și este convergentă pentru $\alpha < 1$. Pentru a o calcula, facem schimbarea

$$r = t^{\frac{1}{2}},\quad dr = \frac{1}{2}\,t^{-\frac{1}{2}}\,dt;$$

obținem

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{n}{2}-1}(1-t)^{-\alpha}\,dt = \frac{1}{2}\,B\left(\frac{n}{2},\quad 1-\alpha\right).$$

de aici rezultă

$$A = \frac{1}{2}\,\frac{\pi^{n/2}n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\,B\left(\frac{n}{2},\quad 1-\alpha\right).$$

8. Să se calculeze integrala

$$I = \iint\cdots\int_{V_n} \frac{dx_1\,dx_2\ldots dx_n}{(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)^{\frac{n}{2}-1}\,(a^2+x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)^n}.$$

unde V_n este tot spațiul R^n.

R: Folosim transformarea

$$\begin{aligned}
x_1 &= r\cos\varphi_1,\\
x_2 &= r\sin\varphi_1\cos\varphi_2,\\
x_3 &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_{n-1} &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1}\\
x_n &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}
\end{aligned}$$

V_n este parcurs pentru

$$0\leqslant r<\infty,\quad 0\leqslant\varphi_1\leqslant\pi,\ \ldots,\ 0\leqslant\varphi_{n-2}\leqslant\pi,\quad 0\leqslant\varphi_{n-1}<2\pi;$$

determinantul funcțional al transformării este (problema 3)

$$\frac{D(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)}{D(r,\ \varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_{n-1})} = r^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1\sin^{n-3}\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2},$$

deci

$$I = 2\pi\int_0^\infty \frac{r^{n-1}\,dr}{r^{n-2}(a^2+r^2)^n}\int_0^\pi \sin^{n-2}\varphi_1\,d\varphi_1\int_0^\pi \sin^{n-3}\varphi_2\,d\varphi_2\ldots$$

$$\ldots\int_0^\pi \sin\varphi_{n-2}\,d\varphi_{n-2}$$

integrala are sens dacă $2n-1>1$, deci $n>1$. Avem

$$\int_0^{\pi} \sin^m x \, dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \, dx = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)}$$

deci

$$I = \frac{\sqrt{\pi^n}}{n-1} \cdot \frac{1}{a^{2n-2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \ldots \cdot \frac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}$$

sau

$$I = \frac{\sqrt{\pi^n}}{n-1} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

CAPITOLUL XIV

ECUAȚII DIFERENȚIALE

1. Să se determine soluția generală a ecuației diferențiale

$$(xy' - y)\cos^2\frac{y}{x} + x = 0, \quad x \neq 0.$$

R: Ecuația este omogenă. Facem schimbarea de funcție

$$y = xz(x), \quad y' = z + xz',$$

obținem

$$x^2z'\cos^2 z + x = 0,$$

sau

$$z'\cos^2 z + \frac{1}{x} = 0$$

separăm variabilele $\cos^2 z\,dz + \frac{dx}{x} = 0$ și integrăm. Rezultă soluția generală

$$Cx = e^{-\frac{1}{4}(2z + \sin 2z)};$$

revenind la variabilele inițiale,

$$Cx = e^{-\frac{1}{4}\left(2\frac{y}{x} + \sin\frac{2y}{x}\right)}.$$

2. Să se integreze ecuația:

$$[x\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - y(x^2 + y^2)]y' - y\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - x(x^2 + y^2) = 0$$

Să se arate că niciuna din curbele integrale nu are puncte la infinit.

R: Trecem la coordonate polare

$$x = r\cos t, \quad y = r\sin t, \qquad r = r(t)$$
$$dy = \sin t\,dr + r\cos t\,dt,$$
$$dx = \cos t\,dr - r\sin t\,dt,$$

obținem ecuația:

$$\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2+1}} = dt, \quad C + \sqrt{r^2+1} = t$$

sau în coordonatele x și y,

$$C + \sqrt{x^2+y^2+1} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Observăm că $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg}\frac{y}{x} < \frac{\pi}{2}$ și deci pentru orice C fixat r nu poate fi nemărginit.

3. Să se determine soluția generală a ecuației

$$y'(y^2 - x^2 - 2xy) + (y^2 - x^2 + 2xy) = 0$$

alegînd un factor integrant $\varphi(x^2+y^2)$.

R: Scriem ecuația sub forma:

$$(y^2 - x^2 + 2xy)\,dx + (y^2 - x^2 - 2xy)\,dy = 0.$$

Pentru ca φ să fie un factor integrant trebuie ca:

$$\frac{\partial}{\partial y}[(y^2 - x^2 + 2xy)\varphi] = \frac{\partial}{\partial x}[(y^2 - x^2 - 2xy)\,\varphi].$$

Notăm $t = x^2 + y^2$; obținem

$$\varphi(+2x + 2y) + 2y(y^2 - x^2 + 2xy)\frac{d\varphi}{dt} =$$

$$= (-2y - 2x)\,\varphi + 2x\frac{d\varphi}{dt}(y^2 - x^2 - 2xy)$$

sau:

$$-\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2\varphi}{t}, \quad +\frac{d\varphi}{\varphi} = -2\frac{dt}{t}$$

cu soluția:

$$\varphi = \frac{C}{t^2}$$

deci $\varphi(x^2+y^2) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}$ este factor integrant.

Obținem astfel ecuația

$$\frac{(y^2 - x^2 + 2xy)}{(x^2+y^2)^2}\,dx + \frac{y^2 - x^2 - 2xy}{(x^2+y^2)^2}\,dy = 0$$

care este o diferențială totală.

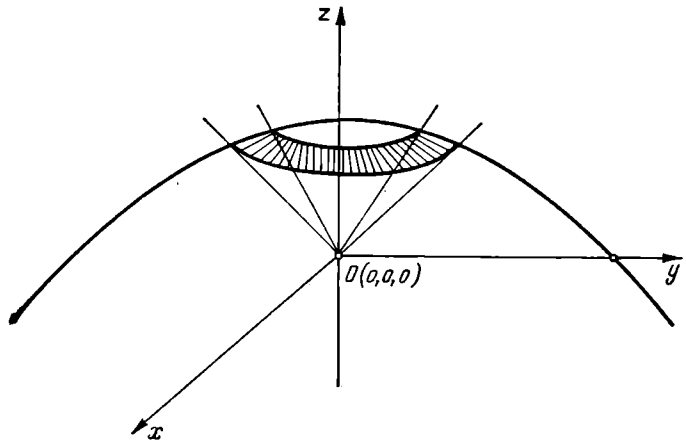

Fig. 45*

Integrăm pe conturul din figura 45*

$$-\int_1^x \frac{dt}{t^2} + \int_0^y \frac{t^2 - x^2 - 2xt}{(t^2 + x^2)^2}\, dt = C$$

$$\frac{1}{x} - 1 + \frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \frac{x}{y^2 + x^2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \frac{y}{x^2 + y^2} = C$$

sau forma echivalentă:

$$\frac{x - y}{x^2 + y^2} = K.$$

O b s e r v a ţ i e. Ecuaţia poate fi considerată şi ecuaţie omogenă, după ce se face schimbarea de funcţie $y(x) = xz(x)$ se obţine soluţia generală prin două cuadraturi.

4. Să se integreze ecuaţia

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - 3y + 5}{2x - y - 5}.$$

R: Dreptele

$$D_1: \quad x - 3y + 5 = 0, \quad D_2: 2x - y - 5 = 0$$

se intersectează în punctul $x = 4$, $y = 3$. Facem schimbarea de variabilă şi de funcţie

$$x = X + 4, \quad y = Y + 3$$

avem $\frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX}$ şi ecuaţia se transformă în

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X - 3Y}{2X - Y},$$

care este omogenă. Facem o nouă schimbare de funcţie

$$Y = ZX; \qquad \text{avem } \frac{dY}{dX} = Z + X\frac{dZ}{dX}, \quad \text{obţinem}$$

$$Z + X\frac{dZ}{dX} = \frac{1-3Z}{2-Z},$$

$$X\frac{dZ}{dX} = \frac{1-3Z}{2-Z} - Z, \quad X\frac{dZ}{dX} = \frac{Z^2-5Z+1}{2-Z},$$

unde se separă variabilele

$$\frac{2-Z}{Z^2-5Z+1}\,dZ = \frac{dX}{X},$$

$$Z^2 - 5Z + 1 = 0, \quad Z_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$$

deci

$$\frac{2-Z}{(Z-\alpha)(Z-\beta)} = \frac{A}{Z-\alpha} + \frac{B}{Z-\beta},$$

cu

$$\alpha = \frac{5+\sqrt{21}}{2}, \quad \beta = \frac{5-\sqrt{21}}{2} \cdot A = \frac{2-\alpha}{\alpha-\beta}, \quad B = \frac{2-\beta}{\beta-\alpha}.$$

obţinem

$$\ln|X| = \frac{2-\alpha}{\alpha-\beta}\ln|z-\alpha| + \frac{2-\beta}{\beta-\alpha}\ln|z-\beta|$$

sau

$$\ln|X| = \frac{2-\alpha}{\alpha-\beta}\ln\left|\frac{Y-\alpha X}{X}\right| + \frac{2-\beta}{\beta-\alpha}\ln\left|\frac{Y-\beta X}{X}\right|$$

sau

$$x-4 = \left[\frac{y-3-\alpha(x-4)}{x-4}\right]^{\frac{2-\alpha}{\alpha-\beta}}\left[\frac{(y-3)-\beta(x-4)}{(x-\alpha)}\right]^{\frac{2-\beta}{\beta-\alpha}}$$

cu α, β daţi mai sus.

5. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale

$$x(1+x^2)y' - y(x^2-1) + 2x = 0.$$

a) Să se cerceteze dacă există soluţii particulare definite pe R.

b) Se consideră tangentele la curbele integrale într-un punct $x_0 \neq 0$. Să se arate că aceste tangente trec printr-un punct fix şi să se determine coordonatele lui în funcţie de x_0.

R: Ecuaţia este liniară. O scriem sub forma:

$$y' - y\frac{x^2-1}{x(x^2+1)} + \frac{2}{x^2+1} = 0, \quad x \neq 0$$

cu soluția generală:

$$y = e^{\int \frac{x^2-1}{x(x^2+2)}\,dx}\left(C - 2\int \frac{e^{-\int \frac{(x^2-1)}{x(x^2+1)}\,dx}}{x^2+1}\,dx\right)$$

sau

$$y = \frac{x^2+1}{x}\left(C + \frac{1}{x^2+1}\right)$$

deci

$$y = Cx + \frac{C+1}{x}, \quad x \neq 0;$$

nu are soluții pentru $x = 0$.

b) Considerăm tangentele la curbele integrale în punctul de coordonate

$$\left(x_0,\ Cx_0 + \frac{C+1}{x}\right),$$

panta tangentei este $y'(x_0) = C - \frac{C+1}{x_0^2}$.

Ecuația dreptei este

$$y - Cx_0 - \frac{C+1}{x} = \left(C - \frac{C+1}{x_0^2}\right)(x - x_0)$$

și dacă o scriem sub forma

$$C\left(2x_0 - x + \frac{x}{x_0^2}\right) - \left(y - \frac{2}{x_0} + \frac{x}{x_0^2}\right) = 0$$

observăm că aceasta reprezintă ecuația unui fascicul de drepte ce conține dreptele de ecuații

$$x = \frac{2x_0^3}{x_0^2 - 1}, \quad y - \frac{2}{x_0} + \frac{x}{x_0^2} = 0,$$

intersectînd cele 2 drepte obținem punctul $A\left(\frac{2x_0^3}{x_0^2-1},\ \frac{-1}{x_0(x_0^2-1)}\right)$.

6. Fie $I(x) = \int_0^x e^{zx-z^3}\,dz$. Să se formeze ecuația diferențială pe care o verifică $I(x)$ și să se integreze.

R: $I'(x) = \int_0^x z\,e^{zx-z^3}\,dz + 1$

sau

$$I'(x) = 1 - \frac{1}{2}\int_0^x -2z\,e^{zx-z^3}\,dz$$

$$I'(x) = 1 - \frac{1}{2}\int_0^x (x - 2z)\,e^{zx-z^3}\,dz + \frac{x}{2}\int_0^x e^{zx-z^3}\,dz$$

Calculînd integrala din membrul 2 obținem

$$I'(x) = 1 - \frac{1}{2} e^{xz - z^2}\Big|_{z=0}^{z=x} + \frac{x}{2} I(x),$$

sau

$$I'(x) - \frac{x}{2} I(x) - 1 = 0 .$$

Ecuația aceasta este liniară și are soluția:

$$I(x) = e^{\frac{x^2}{4}}\left(C + \int e^{-\frac{x^2}{4}} dx\right).$$

Pentru $x = 0$, $I(0) = 0$ și rezultă $C = 0$; deci

$$I(x) = e^{\frac{x^2}{4}} \int e^{-\frac{x^2}{4}} dx.$$

7. Să se determine soluția generală a ecuației Riccati $(1 - x^2)y' = y^2 - x^2y - 2x$ știind că admite soluțiile particulare

$$y_1 = -x^2, \; y_2 = -\frac{1}{x}.$$

R: Facem schimbarea de funcție

$$z(x) = \frac{y + x^2}{y + \frac{1}{x}};$$

derivînd obținem

$$z'\left(y + \frac{1}{x}\right)^2 = (y' + 2x)\left(y + \frac{1}{x}\right) - (y + x^2)\left(y' - \frac{1}{x^2}\right)$$

sau

$$y'(1 - x^3) = xz'\left(y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{2y}{x}\right) - 2x^2y - 3x - \frac{y}{x}.$$

Înlocuind în ecuație obținem

$$xz'\left(y + \frac{1}{x}\right)^2 = (y + x^2)\left(y + \frac{1}{x}\right).$$

Obținem $y + \frac{1}{x} = 0$, soluția particulară și

$$xz' = \frac{y + x^2}{y + \frac{1}{x}},$$

deci, ecuația

$$xz' = z$$

are soluția $z = C_1 x$.
Soluția generală a ecuației Riccati este

$$y = \frac{C_1 - x^2}{1 - C_1 x}.$$

Soluția $y = -\frac{1}{x}$ se obține pentru $C_1 \to \infty$.

8. Se dă ecuația

$$y = 2x + y'^2 - 4y'.$$

Să se integreze. Să se cerceteze dacă admite și soluții singulare.
R: Este o ecuație Lagrange. Punem $y' = p$

$$y = 2x + p^2 - 4p$$

apoi diferențiem; obținem

$$p\mathrm{d}x = 2\mathrm{d}x + (2p - 4)\,\mathrm{d}p$$

sau, $p = 2$ și $\mathrm{d}x = 2\mathrm{d}p$.
Soluția generală este dată de

$$(\Gamma)\begin{cases} x = 2p + \mathrm{C}, \\ y = p^2 + 2\mathrm{C}. \end{cases}$$

Pentru $p = 2$ obținem soluția $y = 2x - 4$. Să vedem dacă ecuația dată admite soluții singulare.
a) Relația

$$y = 2x + p^2 - 4p$$

cu $2 - p = 0$ și $2p - 4 = 0$ sînt compatibile, deci $y = 2x - 4$ este o soluție singulară.
b) Eliminînd pe p în ecuațiile familiei (Γ) obținem

$$y = \frac{1}{4}(x - \mathrm{C})^2 + 2\mathrm{C} \tag{1}$$

dacă derivăm în raport cu C obținem

$$0 = -\frac{1}{2}(x - \mathrm{C}) + 2, \tag{2}$$

apoi eliminăm pe C între ecuațiile (1) și (2) ne dă

$$y = 4 + 2(x - 4) \quad \text{sau} \quad y = 2x - 4, \quad \text{deci} \quad y = 2x - 4$$

poate fi soluție generală sau locul punctelor singulare.

Avem însă din soluția generală, unde

$$\Phi(x, y, C) \equiv -y + \frac{1}{4}(x - C)^2 + 2C,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{1}{2}(x - C), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -1,$$

și sistemul $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$ nu este verificat de $y = 2x - 4$ dreapta $y = 2x - 4$ este soluția singulară și reprezintă înfășurătoarea familiei de drepte reprezentată de integrala generală (figura 45).

9. Să se determine soluția generală a ecuației

$$3y'^2 + 4xy' - y + x^2 = 0.$$

Să se găsească locul geometric al punctelor de extrem ale curbelor integrale.

R: Considerăm ecuația implicită în y' și o rezolvăm în raport cu y

$$y = 3y'^2 + 4xy' + x^2, \tag{1}$$

luăm pe $y' = t$, t variabilă independentă, deci $dy = t\,dx$; diferențiem relația (1)

$$dy = 6t\,dt + 4t\,dx + 4x\,dt + 2x\,dx,$$
$$t\,dx = 6t\,dt + 4t\,dx + 4x\,dt + 2x\,dx,$$
$$dx(3t + 2x) = -(6t + 4x)dt,$$

de aici obținem $3t + 2x = 0$, $t = -\frac{2}{3}x$, deci

$$y = 3\frac{4}{9}x^2 - \frac{8}{3}x^2 + x^2, \quad y = -\frac{1}{3}x^2 \text{ (soluția singulară)}$$

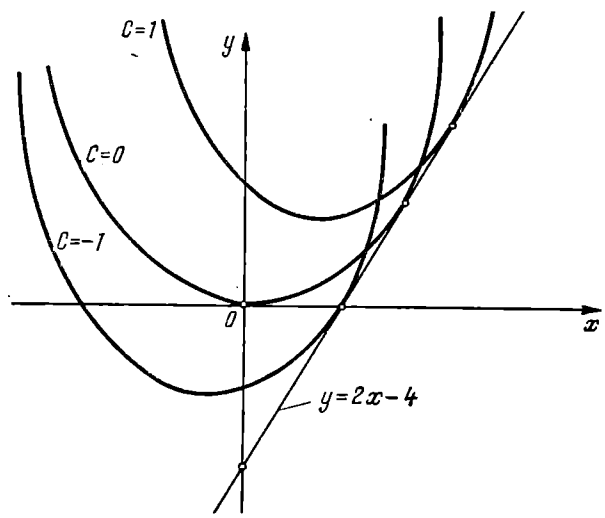

Fig. 45

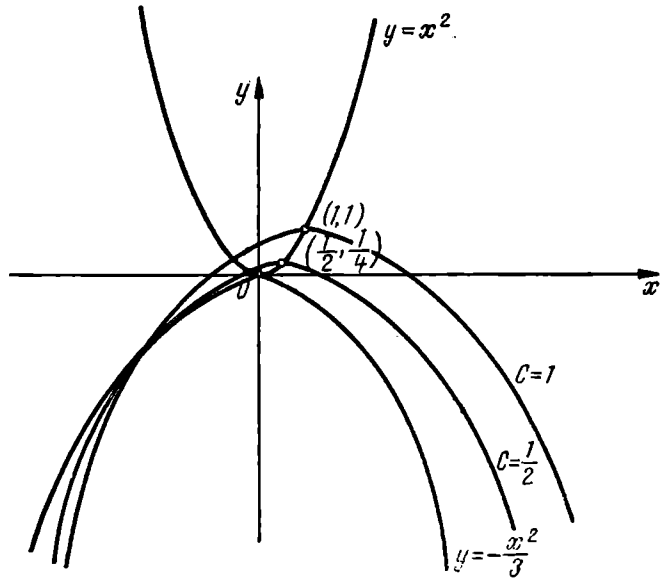

Fig. 46

și

$$dx = -2dt, \quad x = C - 2t, \quad t = \frac{C - x}{2}$$

$$4y = -x^2 + 2Cx + 3C^2, \text{ (soluția generală).}$$

Parabola $y = -\frac{x^2}{3}$ este înfășurătoare pentru familia de parabole

$$4y = -x^2 + 2Cx + 3C^2 \text{ (figura 46).}$$

Pentru a stabili locul geometric căutăm punctele de extrem.

Obținem: $x_M = C$, $y_M = C^2$ deci, locul geometric este parabola de ecuație $y = x^2$.

10. Să se determine integralele generale ale ecuațiilor:

a) $y'^3 + xy'^2 - y = 0$ (ecuația D'Alembert-Lagrange)

b) $16y^2y'^3 + 2xy' - y = 0$.

R: a) Rezolvăm ecuația în raport cu y și alegem $y' = t$, ca parametru

$$y = xt^2 + t^3, \quad dy = t\,dx$$

$$dy = t^2dx + 2xt\,dt + 3t^2dt.$$

Eliminînd dy obținem ecuația liniară

$$(t - t^2)\,dx = t\,(2x + 3t)\,dt$$

sau:

$$x' - \frac{2}{1-t}\,x - \frac{3t}{1-t} = 0$$

Soluția acestei ecuații este:

$$x(t) = e^{\int \frac{2dt}{1-t}} \left(C + 3 \int \frac{t}{1-t} e^{-\int \frac{2}{1-t} dt} dt \right)$$

sau

$$x(t) = \frac{1}{(t-1)^2} \left(C - 3 \int t(t-1) dt \right);$$

deci soluția sub formă parametrică este:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{(t-1)^2} \left(C - t^3 + \frac{3}{2} t^2 \right) \\ y(t) = \frac{t^2}{(t-1)^2} \left(C + t - \frac{t^2}{2} \right) \end{cases}$$

b) Rezolvăm ecuația în raport cu x,

$$x = \frac{y}{2y'} - 8y^2 y'^2;$$

alegem parametrul $y' = p$; $dx = \frac{dy}{p}$; obținem relația:

$x = \frac{y}{2p} - 8y^2 p^2$, diferențiem această relație:

$$dx = \frac{dy}{2p} - \frac{y}{2p^2} dp - 16y\, p^2 dy - 16y^2 p\, dp$$

eliminînd pe dx,

$$\frac{dy}{2p} + 16yp^2 dy = -\frac{y}{2p^2} (1 + 32yp^3)\, dp$$

$1 + 32\, yp^3 = 0$ ne conduce la soluția singulară:

$$y = -\frac{1}{32\, p^3}, \quad x = -\frac{3}{128\, p^4}.$$

Soluția generală va fi obținută prin integrarea ecuației:

$$\frac{dy}{2p} = -\frac{y}{2p^2} dp.$$

Obținem $yp = C_1$, $p = \frac{C_1}{y}$ și înlocuind în relația care leagă pe x, y și p,

$$x = \frac{y^2}{2C_1} - 8C_1;$$

o familie de parabole.

11. Se dă ecuația

$$y = axy'^{\alpha} + by'^{\beta},\ a,\ b,\ \alpha,\ \beta \in R.$$

Să se integreze. Pentru $\alpha = 3$, $\beta = 2$, $a = 1$, $b = -1$, să se discute și soluțiile singulare.

R: Este o ecuație Lagrange. Notăm $y' = p$,

$$y = axp^{\alpha} + bp^{\beta} \tag{1}$$

și diferențiem

$$p\,dx = ap^{\alpha}\,dx + (a\alpha xp^{\alpha-1} + b\beta p^{\beta-1})\,dp$$

sau

$$(ap^{\alpha} - p)\frac{dx}{dp} + a\alpha p^{\alpha-1}x + b\beta p^{\beta-1} = 0$$

care este o ecuație liniară în x. Cu $ap^{\alpha} - p \neq 0$ obținem

$$x = e^{-a\alpha\int \frac{p^{\alpha-1}}{ap^{\alpha}-p}} \left(C - b\beta\int \frac{p^{\beta-1}}{ap^{\alpha}-p}\, e^{\int \frac{a\alpha p^{\alpha-1}}{ap^{\alpha}-p}\,dp}\,dp\right) \tag{2}$$

care împreună cu (1) determină soluția generală.

În cazul particular cerut avem

$$x = e^{-\int \frac{3p}{p^3-1}\,dp}\left[C + 2\int \frac{1}{p^2-1}\cdot e^{\int \frac{3p}{p^3-1}\,dp}\,dp\right]$$

însă

$$\int \frac{3p}{p^2-1}\,dp = \ln|p^2-1|^{\frac{3}{2}}$$

deci

$$x = \frac{1}{(p^2-1)^{3/2}}\left[C + 2\int \sqrt{p^2-1}\,dp\right] \quad \text{dacă} \quad p^2 - 1 > 0$$

și

$$x = \frac{1}{(1-p^2)^{3/2}}\left(C - 2\int \sqrt{1-p^2}\,dp\right), \quad 1 - p^2 > 0$$

$$\int \sqrt{p^2-1}\,dp = \frac{1}{2}\,p\sqrt{p^2-1} - \frac{1}{2}\ln(p + \sqrt{p^2-1})$$

pentru $p^2 - 1 > 0$ și $p > 1$, iar

$$\int \sqrt{1-p^2}\,dp = \frac{1}{2}\arcsin p + \frac{1}{2}\,p\sqrt{1-p^2},$$

pentru $p^2 - 1 < 0$.

Pentru $p^2 - 1 > 0$, $p > 1$ soluția generală este dată de

$$\begin{cases} x = \dfrac{C}{(p^2-1)^{3/2}} + \dfrac{p}{p^2-1} - \dfrac{1}{(p^2-1)^{3/2}} \ln (p + \sqrt{p^2-1}) \\ y = xp^3 - p^2. \end{cases}$$

Am presupus $p^3 - p \neq 0$. Pentru $p = 1$, obținem dreapta $y = x - 1$ care verifică ecuația

$$y = xy'^3 - y'^2$$

însă pentru $p \to 1$, $|x| \to \infty$, deci $y = x - 1$ este o soluție asimptotă.

Dacă $p^2 - 1 < 0$, soluția generală este

$$\begin{cases} x = \dfrac{C}{(1-p^2)^{3/2}} - \dfrac{p}{1-p^2} - \dfrac{1}{(1-p^2)^{3/2}} \arcsin p, \\ y = xp^3 - p^2, \end{cases}$$

iar dreptele $y = x - 1$, $y = -x - 1$ sînt soluții asimptote. Pentru $p = 0$ obținem $y = 0$, care este o soluție singulară.

12. Să se determine traiectoriile ortogonale ale familiei de curbe

$$y = Cx + \frac{2}{C}.$$

Să se determine curbele care trec prin punctul $(1, 3)$.

R: Trebuie să determinăm ecuația diferențială a familiei date. Avem $y' = C$, deci

$$y = y'x + \frac{2}{y'}, \quad y' \neq 0 \tag{1}$$

este ecuația cerută. Ecuația diferențială a traiectoriei ortogonale se obține din (1) înlocuind pe y' cu $-\frac{1}{y'}$; deducem ecuația

$$y = -\frac{x}{y'} - 2y', \quad y' \neq 0$$

care este de tip Lagrange. Punem $y' = p$,

$$y = -\frac{x}{p} - 2p$$

diferențiem

$$p\,dx = -\frac{1}{p}\,dx + \frac{x}{p^2}\,dp - 2dp$$

împărțim cu dp

$$\left(p + \frac{1}{p}\right)\frac{dx}{dp} - \frac{x}{p^2} + 2 = 0$$

sau

$$(\beta)\qquad \frac{dx}{dp} - \frac{1}{p(p^2+1)}x + \frac{2p}{1+p^2} = 0$$

care este liniară în x; soluția generală a ecuației (β) este

$$x = e^{\int \frac{dp}{p(p^2+1)}}\left(C - \int \frac{2p}{1+p^2} e^{-\int \frac{dp}{p(p^2+1)\,dp}}\right),$$

$$\int \frac{dp}{p(p^2+1)} = \ln|p| - \frac{1}{2}\ln(p^2+1) = \ln\frac{|p|}{\sqrt{p^2+1}}\cdot$$

$$\int \frac{2p}{1+p^2}\cdot\frac{\sqrt{p^2+1}}{|p|}\,dp = \operatorname{sign} p \int \frac{2\,dp}{\sqrt{1+p^2}} = 2\frac{|p|}{p}\ln(p+\sqrt{1+p^2})\cdot$$

Ecuația familiei de curbe ortogonale familiei cerute este dată parametric de

$$(\Gamma)\quad \begin{cases} x = \ln\dfrac{|p|}{\sqrt{p^2+1}}\left(C - 2\dfrac{|p|}{p}\ln(p+\sqrt{1+p^2})\right), \\ y = -\dfrac{x}{p} - 2p, \quad p \neq 0. \end{cases}$$

Prin punctul (1, 3) trec două curbe din familie, anume una cu $p_1 = 1$ și a doua cu $p_2 = 2$, cum rezultă din ecuația $3 = p + \frac{2}{p}$. Pentru familia Γ corespund două curbe definite de $p_1^* = -1$, $p_2^* = -\frac{1}{2}$. Pentru $p_1^* = -1$ obținem

$$C_1 = -\frac{1 + 2\ln 2\ln(\sqrt{2}-1)}{\ln 2}$$

iar pentru $p_2^* = -\frac{1}{2}$ obținem

$$C_2 = -\frac{2\ln\sqrt{5}\ln\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{\ln\sqrt{5}}$$

care înlocuite în Γ determină cele două curbe.

13. Să se determine traiectoriile ortogonale ale familiei de cicloide

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

R: Diferențiind relațiile de mai sus obținem

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin t}{\cos t - 1},$$

unde $t = t(x, y)$ este definită implicit ca o funcție de x și y prin relația:

$$(1) \quad \frac{x}{y} = \frac{t - \sin t}{1 - \cos t}.$$

Ecuația diferențială a traiectoriilor ortogonale este:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos t - 1}{\sin t}.$$

Diferențiind (1) și eliminînd dx între cele 2 ecuații obținem ecuația cu variabile separate:

$$\frac{dy}{y} = \left(\operatorname{ctg} \frac{t}{2} - \frac{2}{t}\right) dt, \quad t \neq 0$$

care are soluția:

$$y = C(1 - \cos t)/t^2.$$

Înlocuind în (1) rezultă soluția:

$$\begin{cases} x = C(t - \sin t)/t^2, \\ y = C(1 - \cos t)/t^2. \end{cases}$$

14. Să se determine curbele care fac unghiuri de 45° cu curbele familiei

$$\Gamma: (x^2 + y^2)^2 = ax^2y.$$

R: Trecem la coordonatele polare. Ecuația familiei (Γ) în coordonate polare este:

$$r = a \cos^2\theta \sin\theta. \quad (\Gamma)$$

Unghiul făcut de raza vectoare cu tangenta la curbă în punctul de coordonate $(r, r(\theta))$ are tangenta $\operatorname{tg} V = \frac{r}{r'}$.

Ecuația diferențială a familiei (Γ) este:

$$\frac{r'}{r} = \frac{\cos^2\theta - 2\sin^2\theta}{\cos\theta \sin\theta}.$$

Condiția din enunțul problemei revine la

$$\operatorname{tg} 45° = \operatorname{tg}(V - V_1) = \frac{\frac{r}{r'} - \frac{r}{r_1'}}{1 + \frac{r^2}{r_1' r'}} = 1,$$

de aici rezultă $r' = \frac{r(r_1' - r)}{r + r_1'}$.

Ecuația diferențială a traiectoriilor izogonale este deci

$$\frac{r' - r}{r + r'} = \frac{\cos^2\theta - 2\sin^2\theta}{\cos\theta \sin\theta}$$

sau:

$$\frac{dr}{r} = \frac{\sin 2\theta + 3\cos 2\theta - 1}{\sin 2\theta - 3\cos 2\theta + 1}\,d\theta \cdot$$

Integrînd obținem:

$$\ln r = \int \frac{\sin 2\theta + 3\cos 2\theta - 1}{\sin 2\theta - 3\cos 2\theta + 1}\,d\theta + \ln |C|$$

pentru calculul integralei facem schimbarea $\operatorname{tg}\theta = u$ și integrala devine

$$-\int \frac{2u^2 - u - 1}{2u^2 + u - 1}\frac{du}{1+u^2} = -\frac{4}{5}\int \frac{du}{1+u^2} +$$

$$+\frac{4}{15}\ln\left|u - \frac{1}{2}\right| + \frac{1}{3}\ln|u+1| - \frac{3}{10}\ln(u^2+1) =$$

$$= -\frac{4}{5}\theta + \ln\left(\operatorname{tg}\theta - \frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{15}} \cdot |\operatorname{tg}\theta + 1|^{\frac{1}{3}} \cdot |\cos^{\frac{3}{5}}\theta| \cdot$$

Deci, familia de traiectorii izogonale are ecuația:

$$r = Ce^{-\frac{4}{5}\theta} \cdot (1 + \operatorname{tg}\theta)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\operatorname{tg}\theta - \frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{15}} \cdot (\cos^{\frac{3}{5}}\theta) \cdot$$

15. Să se integreze ecuația

$$(x^2y - 1)y' - (xy^2 - 1) = 0$$

alegînd pe x funcție și t variabilă independentă și $tx = y$.

R: Avem $t\,dx + x\,dt = dy$, $\frac{dy}{dx} = \frac{t\,dx + x\,dt}{dx}$

sau:

$$y' = \frac{x't + x}{x'}.$$

Cu această schimbare ecuația devine

$$x' - \frac{t}{t-1}x^4 + \frac{1}{t-1}x = 0,$$

ceea ce reprezintă o ecuație Bernoulli. Facem schimbarea de funcție $u(t) = \frac{1}{x^3(t)}$, $u' = -3\frac{x'}{x^4}$; noua ecuație este liniară

$$u' - \frac{3}{t-1}u + \frac{3t}{t-1} = 0.$$

$$u = (t-1)^3\left(C - \int \frac{3t}{(t-1)^4}\,dt\right)$$

$$u = (t-1)^3\left(C + \frac{3}{2}\frac{1}{(t-1)^2} + \frac{1}{(t-1)^3}\right) \cdot$$

deci

$$\frac{1}{x^3} = C\left(\frac{y}{x} - 1\right)^3 + \frac{3}{2}\left(\frac{y}{x} - 1\right) + 1 \cdot$$

16. Să se găsească soluția generală a ecuației

1) $y'^3 + 4y'^2 - y' - 4 = 0$,

2) $y'^2 + \left(xy - \frac{1}{xy}\right)y' - 1 = 0$

R: Rezolvată în raport cu y' prima ecuație are soluțiile

$$y' = 1,\ y' = -1,\ y' = -4,$$

deci ecuația admite familiile de soluții date de

$$y = x + C,\ y = -x + C^*,\ y = -4x + C^{**}$$

unde C, C^* și C^{**} sînt constante arbitrare.

Rezolvată în raport cu y' a doua ecuație se descompune în

$$xy\,y' = 1,\ y' + xy = 0$$

sau

$$y\,dy = \frac{dx}{x},\ y^2 = \ln x^2 + C,\ x \neq 0$$

și

$$\frac{dy}{y} = -x\,dx,\ \ln y^2 + x^2 = C^*,\ y \neq 0$$

Mulțimea soluțiilor ecuației 2) este dată de cele două familii de curbe.

17. Să se discute după parametrul $\lambda \in R$, soluțiile ecuațiilor diferențiale

$$\frac{dy}{dx} = (y + 1)^\alpha$$

Se vor pune în evidență soluțiile singulare sau asimptotice.

R: Pentru $\alpha = 0$, ecuația are soluția generală $y = C$ care este o familie de drepte paralele cu axa Ox.

Pentru $\alpha \neq 0$ se separă variabilele și obținem

$$(y + 1)^{-\alpha}\,dy = dx$$

sau, pentru $\alpha \neq 1$,

$$\frac{1}{-\alpha+1}(y + 1)^{-\alpha+1} = x + C,\quad y \neq -1,$$

iar pentru $\alpha = 1$,

$$\ln |y + 1| = x + C,\quad y \neq -1.$$

a) Pentru $\alpha = 1$, putem scrie soluția generală

$$y + 1 = e^{x+C}, \quad x \in R$$

și pentru $C \to -\infty$ obținem soluția $y = -1$. Din figura 47,*a* rezultă că $y = -1$ este o soluție asimptotică pentru soluțiile definite de integrala generală. Pentru $\alpha = 1$, ecuația nu admite soluții singulare.

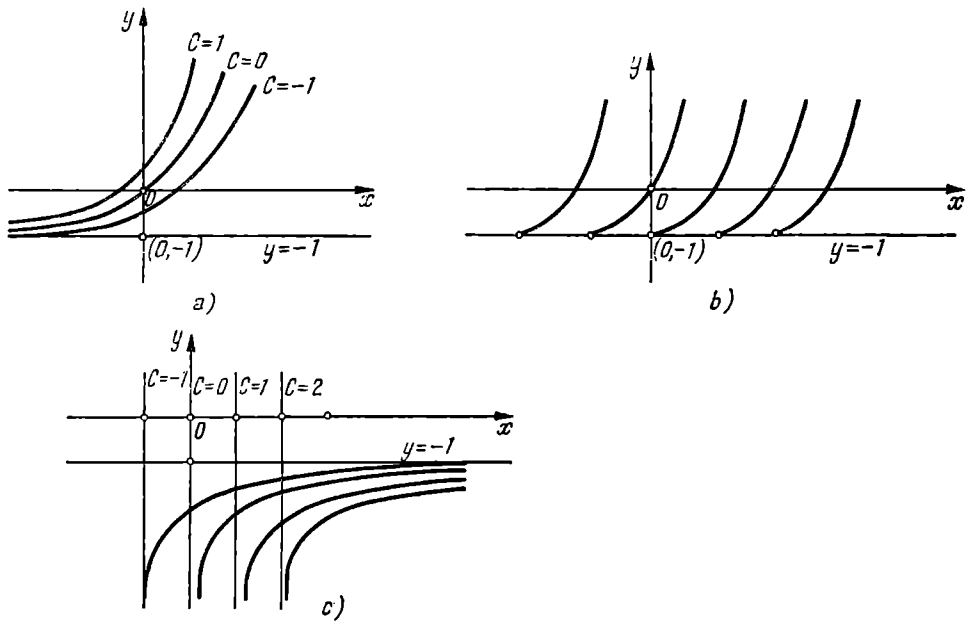

Fig. 47

b) Pentru $\alpha < 1$ soluția generală se scrie

$$y + 1 = [(1 - \alpha)(x + C)]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Ecuația admite și soluția $y + 1 = 0$ care nu se poate obține din soluția generală dînd o valoare particulară constantei C.

Să observăm că dacă notăm

$$f(x, y) = (y + 1)^{\alpha}, \quad \alpha < 1$$

atunci

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{y=1} = |(y + 1)^{\alpha-1}|_{y=-1} = +\infty$$

deci $y = -1$ este o soluție singulară. Pentru $\alpha = \frac{1}{3}$ avem efectiv

$$y + 1 = \left[\frac{2}{3}(x + C)\right]^{\frac{3}{2}}$$

iar $y = -1$ este înfășurătoarea familiilor de parabole (figura 47 *b*).

c) Pentru $\alpha > 1$ soluția generală se scrie

$$y + 1 = [(\alpha - 1)(C - x)^{\frac{-1}{\alpha-1}}$$

însă

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{y=-1} = |(y+1)^{\alpha-1}| = 0_{y=-1}$$

deci $y + 1 = 0$ nu este soluție singulară. Deoarece pentru $C \to \infty$ obținem soluția $y + 1 = 0$, urmează că $y = -1$ este o soluție asimptotică. Pentru $\alpha = 3$ avem în figura 47,*c* comportarea soluțiilor din integrala generală dată în acest caz de

$$y + 1 = [2(C - x)]^{-\frac{1}{2}}.$$

18. Funcțiile e^x și x^2e^x verifică o ecuație diferențială liniară omogenă de gradul al doilea. Pe ce interval ele formează un sistem fundamental de soluții? Să se formeze ecuația.

R. Calculăm determinantul

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & x^2e^x \\ e^x & e^x(x^2 + 2x) \end{vmatrix} = 2xe^{2x}$$

care este Wronskianul celor două funcții. Punctul $x = 0$ este un punct singular deci e^x, x^2e^x formează un sistem fundamental de soluții pe orice interval care nu conține originea. Formăm ecuația

$$\begin{vmatrix} y & e^x & x^2e^x \\ y' & e^x & (2x + x^2)e^x \\ y'' & e^x & (2 + 4x + x^2)e^x \end{vmatrix} = 0,$$

sau

$$xy'' - (2x + 1)y' + (x + 1)y = 0$$

19. Să se calculeze suma seriei

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\frac{y^n}{n!},$$

unde $P_n(x)$ este polinomul lui Legendre.

R. Să notăm

$$f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\frac{y^n}{n!}$$

Folosind identitatea

$$x(2n + 1)\,P_n(x) = nP_{n-1}(x) + (n + 1)\,P_{n+1}(x)$$

ecuația diferențială satisfăcută de $f(y)$ este

$$yf'' + (1 - 2xy)f' + (y - x)f = 0.$$

Facem substituția $f(y) = e^{xy}g(y)$, unde

$$g''(y) + \frac{1}{y}g'(y) + (1 - x^2)g(y) = 0,$$

care este o ecuație Bessel și deci

$$g(y) = J_0(y\sqrt{1 - x^2}).$$

20. Să se determine soluția generală a ecuației

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{E_0}{L}\sin \omega t.$$

R: Această ecuație exprimă variația intensității curentului electric într-un circuit cu forța electromotoare $E_0 \sin \omega t$ (am notat cu L coeficientul de selfinducție și cu R rezistența ohmică).

Ecuația este liniară deci soluția generală este

$$I = e^{-\int \frac{R}{L}dt}\left[C - \int \frac{E_0}{L}\sin \omega t\, e^{\int \frac{R}{L}dt}\, dt\right]$$

sau

$$I = -\frac{L}{R}e^{-\frac{R}{L}t}\left[C - \frac{E_0}{R}\int e^{\frac{R}{L}t}\sin \omega t\, dt\right].$$

Dacă notăm $\operatorname{tg} \gamma = \frac{\omega L}{R}$; $\left(|\gamma| < \frac{\pi}{2}\right)$ și observăm că pentru $t = 0$

$$C = -I_0\frac{R}{L}, \text{ atunci}$$

$$I(t) = e^{-\frac{R}{L}t}\left[I_0 + \frac{\omega L\, E_0}{R^2 + \omega^2 L^2}\right] + \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\sin(\omega t - \gamma)$$

unde I_0 reprezintă intensitatea curentului la momentul $t = 0$.

Cînd $t \to \infty$, $I(t) = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\sin(\omega t - \gamma)$.

21. Să se determine soluția generală a ecuației

$$yy'' = y'[a\sqrt{yy'} + by']$$

R: Este o ecuație omogenă în y, y', y''. Punem $y' = p(y)$, $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = pp'$ și ecuația se transformă în

$$yp\frac{dp}{dy} = p[a\sqrt{py} + bp],$$

sau

$$\frac{dp}{dy} - b\frac{p}{y} - a\sqrt{\frac{p}{y}} = 0 \cdot$$

care este o ecuație de tip Bernoulli. Facem schimbarea de funcție $p = u^2$; $\frac{dp}{dy} = 2u\frac{du}{dy}$; obținem ecuația liniară

$$\frac{du}{dy} - \frac{b}{2}\frac{u}{y} - \frac{a}{2}\frac{1}{\sqrt{y}} = 0 \text{ și } u = 0$$

$$u(y) = e^{\frac{b}{2}\int\frac{dy}{y}}\left(c + \frac{a}{2}\int\frac{1}{\sqrt{y}}e^{-\frac{b}{2}\int\frac{dy}{y}}\,dy\right)$$

$$u(y) = y^{\frac{b}{2}}\left(C + \frac{a}{2}\int\frac{dy}{y^{\frac{1}{2}+\frac{b}{2}}}\right)$$

pentru $b \neq 1$, avem

$$u(y) = Cy^{\frac{b}{2}} - \frac{a}{b-1}\sqrt{y}, \quad y > 0$$

și pentru $b = 1$

$$u(y) = C\sqrt{y} + \frac{a}{2}\sqrt{y}\ln|y|, \; y > 0$$

dacă revenim la variabila inițială, pentru $b \neq 1$ obținem

$$\frac{dy}{dx} = \left(Cy^{\frac{b}{2}} - \frac{a}{b-1}\sqrt{y}\right)^2$$

sau

$$x + C^* = \int\frac{dy}{\left(Cy^{\frac{b}{2}} - \frac{a}{b-1}\sqrt{y}\right)^2}$$

care reprezintă soluția generală în acest caz. Pentru $b = 1$, un rezultat asemănător.

Ecuația $u = 0$ conduce la $p = 0$, deci dreptele $y = C^{**}$ sînt de asemenea soluții ale ecuației date.

22. Să se integreze ecuația

$$(1 + y'^2)\,y''' = 3\,y'y''^2.$$

R: $y'' \neq 0$, avem

$$\frac{y'''}{y''} = \frac{3y'y''}{1+y'^2},$$

care prin integrare, dă

$$(1) \quad y'' = C(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}$$

Punem $y' = \operatorname{tg}\alpha$, deci $y'' = C\frac{1}{\cos^3\alpha}$

$$dy' = \frac{1}{\cos^2\alpha}d\alpha = y''\,dx, \text{ deci } dx = \frac{1}{C}\sin\alpha\,d\alpha,$$

$$dy = \frac{1}{C}\cos\alpha\,d\alpha, \; x = -\frac{1}{C}\cos\alpha + a, \; y = \frac{1}{C}\sin\alpha + b$$

Eliminăm pe α; obținem

$$(2) \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 = \frac{1}{C^2}$$

deci soluția generală este formată de mulțimea tuturor cercurilor din plan. Invers, dacă derivăm de trei ori pe (2) și eliminăm pe a, b, C, obținem ecuația din enunț. Să observăm că (1) se scrie

$$C = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

deci singurele curbe plane cu raza de curbură constantă sînt cercurile.

23. Fie (Γ) o curbă plană, C centrul de curbură al unui punct curent $M(x, y)$ și N punctul de intersecție al normalei în M la Γ cu axa Ox. Să se determine curbele Γ pentru care

a) $|\overline{MC}| - |\overline{MN}| = 0$,

b) $|\overline{MC}| - 2|\overline{MN}| = 0$;

c) $|\overline{MC}| + 2|MN| = 0$.

R: Avem $|\overline{MC}| = R = \frac{1}{|y''|}(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}$. Normala în M la (Γ) are ecuația

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x)$$

deci N are coordonatele $(x + yy', 0)$; de unde rezultă

$$|\overline{MN}| = \sqrt{y^2 + y^2y'^2} = |y|\sqrt{1 + y'^2}.$$

a) Ecuația diferențială este

$$\frac{1}{y''}(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} = y\sqrt{1 + y'^2}$$

sau

$$yy'' = 1 + y'^2$$

punem $y' = p$, $y'' = pp'$, y fiind variabilă independentă; obținem

$$y\ pp' = 1 + p^2,\ \frac{p}{1 + p^2}\,dp = \frac{dy}{y}$$

sau

$$\ln(1 + p^2) = \ln C^2y^2,\ y = \frac{1}{C}\sqrt{1 + p^2}$$

$$p\ dx = dy,\ dx = \frac{1}{C}\frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}}$$

$$x + C^* = \frac{1}{C}\ln(p + \sqrt{1 + p^2})$$

care, împreună cu $y = \frac{1}{C}1 + p^2$, determină familia de curbe Γ.

b) Relația conduce la ecuația diferențială

$$1 + y'^2 = 2\ yy''$$

cu $y' = p$, $y'' = pp'$, obținem $1 + p^2 = pp'$, care, integrată, dă $y = C(1 + p^2)$; în continuare

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{2\ Cp\ dp}{p} = 2\ C\ dp$$

deci

$$(\Gamma')\ \begin{cases} x + C^* = 2\ Cp \\ y = C(1 + p^2) \end{cases}$$

este soluția generală în cazul (b); o familie de parabole.

c) Relația conduce la ecuația diferențială

$$1 + y'^2 + 2\ yy'' = 0$$

$$y' = p,\ y'' = pp',\ 1 + p^2 + 2\ y\ pp' = 0$$

deci

$$y = \frac{C}{1+p^2},\quad \mathrm{d}x = \frac{1}{p}\,\mathrm{d}y = -\frac{2\,C\,\mathrm{d}p}{(1+p^2)^2}$$

$$(\Gamma'')\begin{cases} x = -C\left(\dfrac{p}{1+p^2} + \operatorname{arctg}\ p\right) + C^* \\ y = \dfrac{C}{1+p^2} \end{cases}$$

24. Să se scrie ecuația

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2} = 1$$

sub forma unei ecuații diferențiale în y. Apoi să se integreze.

R: Avem, luînd pe y funcție,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}},\quad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2} = -\frac{\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}}{\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^3}$$

și ecuația se transformă în

$$y''y'^3 - y'' = y'^3.$$

Dacă punem $y' = p$, $y'' = p'$, deoarece lipsește y, obținem

$$p'(p^3 - 1) = p^3 \text{ sau } \left(1 - \frac{1}{p^3}\right)\mathrm{d}p = \mathrm{d}x$$

care dă

$$x = p + \frac{1}{2p^2} + C_1 \tag{1}$$

obținem în continuare

$$\mathrm{d}y = p\ \mathrm{d}x = p\left(1 - \frac{1}{p^3}\right)\mathrm{d}p$$

care dă

$$y = \frac{p^2}{2} + \frac{1}{p} + C_2 \tag{2}$$

care, împreună cu (1), determină soluția generală a ecuației din enunț.

25. Să se determine soluția generală a ecuației

$$x = \ln y'' + y'', \quad y'' > 0.$$

Să se enunțe și să se rezolve o problemă de tip Cauchy.

R: Punem $y'' = t$, $x = \ln t + t$,

$$y' = \int y'' \, dx = \int t\left(\frac{1}{t} + 1\right) dt = t + \frac{1}{2} t^2 + C_0$$

$$y = \int y' \, dx = \int \left(t + \frac{1}{2} t^2 + C_0\right)\left(\frac{1}{t} + 1\right) dt$$

$$y = \int \left(1 + \frac{1}{2} t + \frac{C_0}{t} + t + \frac{1}{2} t^2 + C_0\right) dt.$$

Soluția generală a ecuației din enunț este dată de

$$(\Gamma) \quad \begin{cases} x = \ln t + t \\ y = (1 + C_0)\, t + \frac{3}{4} t^2 + \frac{1}{6} t^3 + C_0 \ln t + C_1, \ t > 0. \end{cases}$$

Să determinăm soluția particulară care satisface condițiile $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$. Avem

$$1 + C_0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + C_1 = 1,$$

$$1 + \frac{1}{2} + C_0 = 0,$$

care dau

$$C_0 = -\frac{3}{2}, \ C_1 = \frac{1}{2}.$$

Soluția particulară este

$$\begin{cases} x = \ln t + t, \\ y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} t + \frac{3}{4} t^2 + \frac{1}{6} t^3 - \frac{3}{2} \ln t, \ t > 0. \end{cases}$$

26. Soluția generală a ecuației:

$$4y^2 y''' - 18y\, y' y'' + 15\, y'^3 = 0.$$

R: Lipsește x din ecuație, deci facem schimbarea

$$y' = z(y), \ y'' = zz', \ y''' = (z'^2 + zz'')\, z.$$

Ecuația devine:

$$4y^2z(z'^2 + zz'') - 18\,yz^2z' + 15\,z^3 = 0.$$

Obținem $z = 0$, de unde $y = C$;

$$4y^2zz'' + 4y^2z'^2 - 18\,yzz' + 15\,z^2 = 0.$$

Ecuația este omogenă în z, z', z'' deci îi putem reduce ordinul cu o unitate, dacă luăm $z' = u(y)$. $z,\ z'' = u'z + uz' = z(u' + u^2)$.

Ecuația transformată este:

$$4y^2(u' + u^2) + 4y^2u^2 - 18\,yu + 15 = 0$$

$$4y^2u' + 8\,y^2u^2 - 18\,uy + 15 = 0$$

care este o ecuație Riccati. O scriem sub forma:

$$u' + 2u^2 - \frac{9}{2}\frac{u}{y} + \frac{15}{4y^2} = 0.$$

Observăm că admite o soluție particulară de forma

$$u_0 = \frac{a}{y},\ u_0' = -\frac{a}{y^2}$$

dacă înlocuim în ecuație, obținem $a = \frac{2}{3}$.

Vom face schimbarea de funcție:

$$u = \frac{1}{v} + \frac{3}{2y}.$$

Obținem o ecuație liniară

$$v' - \frac{3}{2}\frac{v}{y} - 2 = 0$$

$$v(y) = e^{\frac{3}{2}\ln y}\left(C_1 + 2\int e^{-\frac{3}{2}\ln y}\,dy\right)$$

$$v(y) = y^{\frac{3}{2}}\left(C_1 + 2\int y^{-\frac{3}{2}}\,dy\right)$$

$$v(y) = y^{\frac{3}{2}}\,(C_1 - y^{-\frac{1}{2}}).$$

Revenind la variabilele inițiale, rezultă ecuația

$$\frac{z'}{z} = \frac{3}{2y} + \frac{1}{y(C_1\sqrt{y} - 1)}$$

care are soluția generală

$$z = C_2\sqrt{y}(C_1\sqrt{y} - 1)^2,$$

de unde

$$\frac{dy}{\sqrt{y}(C_1\sqrt{y}-1)^2} = C_2\,dx$$

şi, prin integrare

$$-\frac{2}{C_1}\frac{1}{C_1\sqrt{y}-1} = C_2x + C_3$$

deci:

$$\frac{1}{1-C_1\sqrt{y}} = \lambda x + \mu,$$

este soluţia generală a ecuaţiei.

27. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei:

$$y'' + y^3y' - yy'\sqrt{4y' + y^4} = 0.$$

R: Lipseşte x, deci alegem $y' = u(y)$,

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = u\frac{du}{dy}$$

Cu această transformare, ecuaţia devine

$$uu' + y^3u - yu\sqrt{4u + y^4} = 0.$$

Obţinem $u = 0$, deci $y' = 0$, $y = C$ o familie de drepte care verifică ecuaţia diferenţială.

Rămîne de rezolvat ecuaţia:

$$u' + y^3 - y\sqrt{4u + y^4} = 0$$

În această ecuaţie facem schimbarea de funcţie $4u(y) + y^4 = z(y)$, de unde:

$$4u' + 4y^3 = z'$$

ecuaţia devine: $z' - 4y\sqrt{z} = 0$. Observăm că $z = 0$ verifică ecuaţia, deci $4u + y^4 = 0$ este soluţie. Aceasta conduce la soluţia $3x + \frac{4}{y^3} = C_1$. Pentru $z > 0$, avem:

$$\frac{dz}{2\sqrt{z}} - 2y\,dy = 0$$

$$\sqrt{z} - y^2 = C_1;\quad \sqrt{4u + y^4} = C_1 + y^2$$

de unde

$$4u + y^4 = (C_1 + y^2)^2.$$

Revenind la variabilele iniţiale, obţinem ecuaţia:

$$4y' = C_1^2 + 2y^2C_1,\quad \frac{4\,dy}{C_1 + 2y^2} = C_1dx.$$

Vom considera cazurile:

I. $C_1 = 2\lambda_1^2 > 0$. În acest caz, ecuația este

$$\frac{dy}{\lambda_1^2 + y^2} = \lambda_1^2\, dx,$$

cu soluția

$$\frac{1}{\lambda_1} \operatorname{arctg} \frac{y}{\lambda_1} = \lambda_1^2 x + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

deci

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{\lambda_1} = \lambda_1^3 x + \lambda_2$$

sau

$$y = \lambda_1 \operatorname{tg} (\lambda x_1^3\, x + \lambda_2).$$

II. $C_1 = -2\,\lambda_1^2 < 0$. În acest caz, ecuația este:

$$\frac{dy}{y^2 - \lambda_1^2} = -\,\lambda_1^2\, dx,$$

și, integrînd, obținem:

$$\frac{y - \lambda_1}{y + \lambda_1} = e^{-2\lambda_1^3 x + 2\lambda_2}$$

sau

$$y = \frac{e^{-2\lambda_1^3 x + 2\lambda_2} + 1}{1 - e^{-2\lambda_1^3 x + 2\lambda_2}}, \quad y = \operatorname{hct}(\lambda_1^3 x - \lambda_2).$$

III. $C_1 = 0$, $y' = 0$, $y = K$.

28. Să se determine soluția generală a ecuației:

$$y'' \sin^2 x + y' \sin x \cos x - y = 0$$

știind că admite o soluție particulară $y_1(x) = \operatorname{ctg} x$. Să se determine soluția particulară ce verifică condițiile $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

R: Facem schimbarea de funcție $y(x) = z(x) \cdot \operatorname{ctg} x$.

$$y' = z' \operatorname{ctg} x - \frac{z}{\sin^2 x}, \quad y'' = z'' \operatorname{ctg} x - 2\frac{z'}{\sin^2 x} + \frac{2z \cos x}{\sin^3 x}.$$

Obținem ecuația transformată:

$$z'' \cos x \sin x + z' (\cos^2 x - 2) = 0$$

sau, pentru $\sin x \cos x \neq 0$,

$$\frac{z''}{z'} + \frac{\cos^2 x - 2}{\cos x \sin x} = 0.$$

Integrînd ecuaţia aceasta, obţinem:

$$\ln|z'| + \ln|\sin x| - 2\ln|\operatorname{tg} x| = \ln|C_1|$$

$$z' = \frac{C_1 \operatorname{tg}^2 x}{\sin x}, \quad z' = \frac{C_1 \sin x}{\cos^2 x}$$

$$z = \frac{C_1}{\cos x} + C_2 .$$

Înlocuind în schimbarea de funcţie, obţinem:

$$y(x) = \frac{C_1}{\sin x} + C_2 \operatorname{ctg} x$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = C_1 = 1; \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -C_2 = 0.$$

Soluţia particulară este deci:

$$y(x) = \frac{1}{\sin x}$$

29. Fie α şi β două numere constante şi ecuaţia

$$y'' + 2\alpha y' + (\alpha^2 + \beta)\, y = 0.$$

a) Să se determine soluţia generală a ecuaţiei.

b) Să se determine α şi β astfel ca o curbă integrală a ecuaţiei să taie axa Ox de o infinitate de ori şi distanţa între două puncte consecutive de intersecţie cu axa Ox să fie π.

R: a) Ecuaţia cu coeficienţi constanţi admite ecuaţia caracteristică.

$$r^2 + 2\alpha r + (\alpha^2 + \beta) = 0$$

$$r_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{-\beta}$$

I: $\beta > 0$; $y = C_1 e^{-\alpha x} \cos\sqrt{\beta}x + C_2 e^{-\alpha x} \sin\sqrt{\beta}x$,

II: $\beta < 0$; $y = C_1 e^{(-\alpha+\sqrt{-\beta})x} + C_2 e^{(-\alpha-\sqrt{-\beta})x}$,

III: $\beta = 0$; $y = C_1 e^{-\alpha x} + C_2 x e^{-\alpha x}$.

b) Curba integrală căutată se găseşte în familia de curbe integrale date în cazul I.

Intersectînd cu axa Ox, avem:

$$C_1 \cos\sqrt{\beta}x - C_2 \sin\sqrt{\beta}x = 0$$

$$\frac{C_1}{C_2} = \operatorname{tg}\sqrt{\beta}x; \quad \sqrt{\beta}x = k\pi \pm \operatorname{arctg}\frac{C_1}{C_2}$$

$$x_k = \frac{k\pi}{\sqrt{\beta}} \pm \frac{1}{\sqrt{\beta}} \operatorname{arctg}\frac{C_1}{C_2}$$

$$x_{k+1} = \frac{(k+1)\pi}{\sqrt{\beta}} \pm \frac{1}{\sqrt{\beta}} \operatorname{arctg} \frac{C_1}{C_2}$$

$$x_{k+1} - x_k = \frac{\pi}{\sqrt{\beta}} = \pi; \quad \beta = 1$$

deci

$$y = C_1 e^{-\alpha x} \cos x - C_2 e^{-\alpha x} \sin x, \qquad x \in R.$$

30. Soluția generală a ecuațiilor diferențiale:

1) $y^{IV} + a^4 y = 0$

2) $y^{IV} - 4y''' + 5y'' - 4y' + y = 0.$

R: 1) Ecuația caracteristică a primei ecuații este

$$r^4 + a^4 = 0$$

și are rădăcinile

$$r_1 = -a\frac{\sqrt{2}}{2} + ia\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad r_2 = -a\frac{\sqrt{2}}{2} - ia\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$r_3 = a\frac{\sqrt{2}}{2} + ia\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad r_4 = a\frac{\sqrt{2}}{2} - ia\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Soluția generală a ecuației este

$$y = e^{-a\frac{\sqrt{2}}{2}t}\left(C_1 \cos\frac{a\sqrt{2}}{2}t + C_2 \sin\frac{a\sqrt{2}}{2}t\right) +$$

$$+ e^{a\frac{\sqrt{2}}{2}t}\left(C_3 \cos\frac{a\sqrt{2}}{2}t + C_4 \sin\frac{a\sqrt{2}}{2}t\right).$$

b) Ecuația caracteristică este:

$$r^4 - 4r^3 + 5r^2 - 4r + 1 = 0$$

o ecuație reciprocă, care se scrie:

$$r^2 + \frac{1}{r^2} - 4\left(r + \frac{1}{r}\right) + 5 = 0.$$

Luînd $r + \frac{1}{r} = s$, obținem ecuația

$$s^2 - 2 - 4s + 5 = 0$$

$$s^2 - 4s + 3 = 0, \; s_1 = 1, \; s_2 = 3.$$

Acestea conduc la ecuațiile în r:

$$r^2 - r + 1 = 0, \quad r^2 - 3r + 1 = 0,$$

care au rădăcinile:

$$r_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad r_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

$$r_3 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \quad r_4 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

Soluția generală a ecuației diferențiale este:

$$y = e^{\frac{t}{2}}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_3\, e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}t} + C_4\, e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}t}, \quad t \in R.$$

31. Soluția generală a ecuațiilor:

a) $y^{IV} + 2y''' - 3y'' - 4y' + 4y = 32 \sin 2x - 24 \cos 2x.$

b) $x^4 y^{IV} + 8x^3 y''' + 12x^2 y'' = \frac{\ln x}{x}, \quad x > 0.$

R: a) Ecuația este liniară. Ecuația omogenă are ecuația caracteristică

$$r^4 + 2r^3 - 3r^2 - 4r + 4 = 0$$

cu rădăcinile:

$$r_1 = r_2 = 1, \; r_3 = r_4 = -2.$$

Soluția generală a ecuației omogene este:

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-2x} + C_4 x e^{-2x}, \qquad x \in R.$$

Alegem o soluție particulară de forma:

$$y_0 = A \sin 2x + B \cos 2x.$$

Înlocuind în ecuația neomogenă și identificînd, obținem:

$$32A + 24B = 32$$

$$-24A + 32B = -24$$

Acest sistem are soluția $A = 1$, $B = 0$, deci soluția generală a ecuației neomogene este:

$$y = C_1 e^x + C_2 x\, e^x + C_3 e^{-2x} + C_4 x\, e^{-2x} + \sin 2x.$$

b) Ecuația este de tip Euler. Pentru ecuația omogenă căutăm soluții de forma: $y = x^r$, $x > 0$.

Ecuația caracteristică este:

$$r(r-1)(r-2)(r-3) + 8r(r-1)(r-2) + 12r(r-1) = 0,$$

rădăcinile ecuației sînt:

$$r_1 = 0, \; r_2 = 1, \; r_3 = -1, \; r_4 = -2;$$

soluția generală a ecuației omogene este:

$$\bar{y} = C_1 + C_2 x + C_3 x^{-1} + C_4 x^{-2}.$$

Pentru stabilirea unei soluții particulare a ecuației neomogene, folosim metoda variației constantelor:

$$\begin{aligned} C_1' + C_2'x + C_3'x^{-1} + C_4'x^{-2} &= 0 \\ C_2' - C_3'x^{-2} - 2C_4'x^{-3} &= 0 \\ C_3'x^{-3} + 3C_4'x^{-4} &= 0 \\ C_3'x^{-4} + 4C_4'x^{-5} &= x^{-5} \ln x. \end{aligned}$$

Acest sistem se mai scrie:

$$\begin{aligned} C_1'x^2 + C_2'x^3 + C_3' + C_4' &= 0 \\ C_2'x^3 - C_3'x - 2C_4' &= 0 \\ C_3'x + 3C_4' &= 0 \\ C_3'x + 4C_4' &= \ln x. \end{aligned}$$

Soluția sistemului este:

$$C_4' = \ln x,\ C_3' = -\frac{3}{x}\ln x,$$

$$C_2' = -\frac{\ln x}{x^3},\quad C_1' = \frac{3}{x^2}\ln x.$$

Integrînd, obținem:

$$C_4 = x(\ln x - 1) + K_4;\quad C_3 = -\frac{3}{2}\ln^2 x + K_3,$$

$$C_2 = \frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{4x^2} + K_2;\quad C_1 = -\frac{3}{x}(1 + \ln x) + K_1,$$

deci soluția generală este dată de:

$$y = K_1 + K_2x + \frac{K_3}{x} + \frac{K_4}{x^2} - \frac{7}{2x} - \frac{3}{2x}\ln x - \frac{3}{2x}\ln^2 x,\quad x > 0.$$

32. Să se determine soluția generală a ecuației

$$xy'' - (x + 3)y' + 2y = 0$$

derivînd ecuația de două ori.

R: Derivînd ecuația, obținem

$$xy^{IV} - y'''(x + 1) = 0$$

sau:

$$\frac{x^{IV}}{y''} = \frac{1}{x} + 1$$

de unde

$$y''' = C_1x\,e^x$$

Integrînd succesiv, obținem:

$$y'' = C_1(x\,e^x - e^x) + C_2$$

$$y' = C_1(x\,e^x - 2\,e^x) + C_2x + C_3$$

$$y = C_1(x\,e^x - 3\,e^x) + \frac{C_2x^2}{2} + C_3x + C_4.$$

Înlocuind în ecuația inițială, reducem numărul constantelor arbitrare.

Înlocuind în ecuație și identificînd, rezultă:

$$-2C_2 + C_3 = 0, \quad 2C_4 - 3C_3 = 0,$$

$$C_3 = 2C_2, \qquad C_4 = 3\,C_2$$

Soluția generală a ecuației este așadar:

$$y(x) = C_1\,e^x(x - 3) + C_2(x^2 + 4x + 6).$$

O b s e r v a ț i e. O soluție particulară a ecuației se obține căutînd-o de forma unui polinom.

33. Să se determine soluția generală a ecuației

$$y'' + (e^{2y} + x)\,y'^3 = 0$$

alegînd pe y ca variabilă independentă.

R: Ecuația se transformă, ținînd seama că:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x'(y)}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x'(y)}\right) = -\frac{x''}{x'^3}$$

în

$$-\frac{x''}{x'^3} + (e^{2y} + x)\frac{1}{x'^3} = 0$$

sau, pentru $x \neq 0$;

$$x'' - x - e^{2y} = 0$$

care este o ecuație liniară cu soluția generală

$$x = e^{\int dy}\left(C + \int e^{2y}\,e^{-y}\,dy\right),$$

$$x = e^y\,(C + e^y).$$

34. Să se determine soluția generală a ecuației:

$$(x^2 - 4)\,y'' + xy' - n^2y = 0, \quad x \neq +2, \qquad n \in N,$$

sub forma unei serii de puteri (Ecuația lui Bessel).

R: Căutăm o soluție de forma:

$$\begin{array}{c|l} -n^2 & y = a_0x^r + a_1x^{r+1} + a_2x^{r+2} + \ldots + a_nx^{r+n} + \ldots \\ x & y' = a_0rx^{r-1} + a_1(r+1)\,x^r + a_2(r+2)\,x^{r+1} + \ldots + a_n(r+n)x^{r+n-1} + \ldots \\ x^2-4 & y'' = a_0r(r-1)\,x^{r-2} + a_1(r+1)\,rx^{r-1} + a_2(r+2)\,(r+1)\,x^r + \\ & \qquad + \ldots + a_n(r+n)\,(r+n-1)\,x^{r+n-2} + \ldots \end{array}$$

Înlocuind în ecuație și identificînd, obținem:

$$x^{r-2}: -4\,a_0r(r-1) = 0;\quad x^{r-1}: -4\,a_1r(r+1) = 0$$

$$x^r: \quad a_0r(r-1) + a_0r - n^2a_0 - 4\,a_2(r+2)(r+1) = 0$$

$$x^{r+1}: -4\,a_3(r+3)(r+2) + a_1r(r+1) + a_1(r+1) - a_1n^2 = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x^{r+n}: -4\,a_{n+2}(r+n+2)\,(r+n+1) + a_n(r+n)\,(r+n) - 1) +$$

$$+ a_n(r+n) - n^2a_n = 0.$$

Din primele două ecuații obținem $r = 0$ și a_1 și a_0 rămîn nedeterminați. Pentru $r = 0$, sistemul devine:

$$-n^2a_0 = 4a_2 \cdot 2 \cdot 1$$

$$a_1(1^2 - n^2) = 4a_3 \cdot 3 \cdot 2$$

$$\vdots$$

$$a_p(p^2 - n^2) = 4a_{p+2}(p+2)\,(p+1)$$

$$\vdots$$

n este fix: să presupunem că $n = 2s + 1$ (impar). Atunci sistemul are soluția

$$a_2 = -\frac{n^2}{4 \cdot 1 \cdot 2}\,a_0$$

$$a_4 = \frac{2^2 - n^2}{4 \cdot 4 \cdot 3}\,a_2$$

$$\vdots$$

$$a_{2k+2} = \frac{4k^2 - n^2}{4 \cdot (2k+2)\,(2k+1)}\,a_{2k}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{2k+2} = -\frac{n^2(2^2 - n^2)\ldots(4k^2 - n^2)}{4^{k+1}(2k+2)!}; \qquad p = 1, 2, \ldots$$

Pentru coeficienții de indice impar se observă că pentru $p = 2s + 1$

$a_{2s+3} = 0$ și toți termenii următori sînt zero, deci soluția particulară va fi un polinom. Calculul coeficienților:

$$a_3 = \frac{1^2 - n^2}{4 \cdot 3 \cdot 2} a_1$$

$$a_5 = \frac{3^2 - n^2}{4 \cdot 5 \cdot 4} a_3$$

$$\vdots$$

$$a_{2s+1} = \frac{(2s-1)^2 - n^2}{4(2s+1)\,2s} a_{2s-1}$$

$$a_{2s+1} = \frac{(1^2 - n^2)(3^2 - n^2) \ldots [(2s-1)^2 - n^2]}{4^s (2s+1)!} a_1 .$$

Dacă înlocuim în seria de puteri inițială, obținem soluția generală:

$$y = a_0 \left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k^2 - n^2) \ldots (2^2 - n^2) n^2}{4^{k+1}(2k+2)!} x^{2k+2}\right) +$$

$$+ a_1 \left(\sum_{k=1}^{s} \frac{(1^2 - n^2)(3^2 - n^2) \ldots [(2k-1)^2 - n^2]}{4^k (2k+1)!} x^{2k+1}\right).$$

Calculînd raza de convergență a seriei de puteri ce apare în soluția generală, obținem $R = 4$. Deci: soluția este valabilă pentru $|x| < 2$.

35. Să se determine soluția generală a ecuației:

$$y'^3 - 3yy'^2 + 4y^3 = a.$$

R: Derivăm ecuația în raport cu x, obținem:

$$3y'^2 y'' - 3y'^3 - 6yy'y'' + 12\, y^2 y' = 0$$

$$y'(y'y'' - y'^2 - 2yy'' + 4y^2) = 0$$

sau:

$$y'(2\,y - y')\,(2y + y' - y'') = 0$$

Ecuația este echivalentă cu una din ecuațiile:

$$y' = 0,\ 2y - y' = 0,\ 2y + y' - y'' = 0.$$

Deci orice soluție a ecuației inițiale are una din formele

$$y = C_1,\quad y = C_2\, e^{2x} + C_3\, e^{-x},\quad y = C_4\, e^{2x}.$$

Înlocuindu-le în ecuația inițială, obținem soluțiile:

$$y = \sqrt[3]{\frac{a}{4}},\quad y = \frac{a}{27K^2} e^{2x} + K\, e^{-x}$$

unde K este o constantă arbitrară.

36. Să se determine soluția generală a ecuației diferențiale:

$$y = xy' - \frac{x^2y''}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}x^n y^{(n)} + f(y^{(n)})$$

(ecuația lui Clairaut generalizată).

R: Derivăm membru cu membru ecuația:

$$y' = (xy'' + y') - \frac{1}{2!}(2xy'' + x^2y''') + \ldots + f'(y^{(n)}) \cdot y^{(n+1)}$$

sau:

$$\left(f'(y^{(n)}) + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}x^n\right) y^{(n+1)} = 0$$

ceea ce conduce la două ecuații.

a) $y^{(n+1)} = 0$, de unde:

$$y^{(n)} = C_1; \quad y^{(n-1)} = C_1x + C_2; \quad \ldots, y' = \frac{C_1x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{C_2x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + C_n.$$

Substituind aceste rezultate în ecuația inițială, obținem:

$$y = \left(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{2!(n-2)!} + \frac{1}{3!(n-3)!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-2}}{(n-1)!} + \right.$$

$$\left. + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}\right) C_1x^n + \left(\frac{1}{(n-2)!} - \frac{1}{2!(n-3)!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-3}}{(n-2)!} + \right.$$

$$\left. + \frac{(-1)^{n-2}}{(n-1)!}\right) C_2x^{n-1} + \ldots + C_{n-1}\frac{x^2}{2!} + C_nx^n + f(C_1),$$

de unde

$$y = \frac{C_1x^n}{n!} + \frac{C_2x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + \frac{C_{n-1}}{2!}x^2 + C_nx + f(C_1).$$

b) Din cealaltă ecuație:

$$f'(y^{(n)}) + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}x^n = 0.$$

Dacă aceasta poate fi rezolvată pentru $y^{(n)}$, rezultă

$$y^{(n)} = G(x)$$

pe care dacă o înlocuim în ecuația inițială și apoi rearanjăm, rezultă

$$\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + \frac{x^2y''}{2!} - xy' + y = H(x)$$

ecuație ce are soluția de forma:

$$y = a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + I(x).$$

37. Să se determine sub forma unei serii de puteri soluția ecuației $y'' = yy' - x^2$, care îndeplinește condițiile: $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

R: Căutăm soluția sub forma:

$$y = a_0x^r + a_1x^{r+1} + a_2x^{r+2} + \ldots + a_kx^{r+k} + \ldots$$

Din condiția inițială, rezultă că $y(0) = 1$, deci $r = 0$ și $a_0 = 1$. Cu aceasta, forma soluției va fi:

$$y = 1 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots$$

$$y'' = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + \ldots + n(n-1)\,a_nx^{n+2} + \ldots$$

de asemenea $y'(0) = 1$, deci $a_1 = 1$. Înlocuind în ecuație,

$$2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + \ldots + n(n-1)\,a_nx^{n-2} + \ldots \equiv$$

$$\equiv (1 + x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots)(1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots) - x^2.$$

Prin identificare, obținem sistemul infinit:

$$2a_2 = 1$$

$$3 \cdot 2a_3 = 1 + 2a_2$$

$$4 \cdot 3a_4 = 3a_2 + 3a_3 - 1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$n(n+1)\,a_{n+1} = na_n + (n-1)\,a_{n-1} + \ldots + 2a_2a_{n-2} + a_{n-1}$$

din acest sistem obținem:

$$a_2 = \frac{1}{2},\quad a_3 = \frac{1}{3},\quad a_4 = \frac{1}{8},\quad a_5 = \frac{7}{3 \cdot 4 \cdot 5}$$

Înlocuind în seria de puteri, soluția este:

$$y(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{8}x^4 + \frac{7}{3 \cdot 4 \cdot 5}x^5 + \ldots$$

(ne-am oprit în dezvoltare la primii cinci termeni).

38. În studiul încovoierii unei plăci subțiri, circulare, incastrată pe contur și supusă unei sarcini concentrate P în centrul ei intervine ecuația:

$$x^2\frac{d^2\varphi}{dx^2} + x\frac{d\varphi}{dx} - \varphi = Kx, \quad (K = \text{constant}).$$

Să se integreze și să se determine soluția care satisface condițiile inițiale:

$$x = 0,\ \varphi = 0;\ x = R,\ \varphi = 0.$$

Să se calculeze săgeata din

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\varphi \sim \varphi.$$

R: Este o ecuație Euler neomogenă. Ecuația caracteristică este:

$$r(r-1)+r-1=0$$

cu rădăcinile $r_1=1, r_2=-1$. Ecuația omogenă are așadar soluția generală:

$$\varphi(x)=C_1x+\frac{C_2}{x}, \quad x\neq 0.$$

Pentru obținerea unei soluții particulare a ecuației neomogene, folosim metoda variației constantelor. Rezultă sistemul

$$\begin{cases} xC_1'+\frac{1}{x}C_2'=0 \\ C_1'-\frac{1}{x^2}C_2'=\frac{K}{x} \end{cases}$$

care dă

$$C_1'=\frac{k}{2x}, \quad C_2'=-\frac{1}{2}kx,$$

deci

$$C_1=\frac{k}{2}\ln|x|, \quad C_2=-\frac{k}{4}x^2$$

iar soluția generală a ecuației neomogene este

$$\varphi(x)=C_1x+\frac{C_2}{x}+\frac{k}{2}x\ln|x|-\frac{k}{4}x, \quad x\neq 0.$$

Prima condiție cere ca $\varphi\to 0$ cînd $x\to 0$, care conduce în mod necesar la $C_2=0$. A doua condiție $\varphi=0$, $x=R$, ne dă

$$0=C_1R+\frac{k}{2}R\ln R-\frac{k}{4}R,$$

deci

$$C_1=-\frac{k}{2}\ln R+\frac{k}{4}.$$

Soluția particulară obținută este

$$\tilde{\varphi}(x)=\frac{1}{2}kx(\ln|x|-\ln R), \quad x\neq 0.$$

Săgeata y este dată de ecuația diferențială

$$\frac{dy}{dx}=\varphi, \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}kx(\ln|x|-\ln R)$$

deci

$$y=-\frac{k}{4}x^2\ln R\Big|_x^R+\frac{1}{2}k\int_x^R x\ln|x|\,dx,$$

sau

$$y = -\frac{k}{4}(R^2 - x^2)\ln R + \frac{k}{2}\left[\frac{1}{2}x^2 \ln|x| - \frac{x^2}{4}\right]_x^R$$

sau

$$y = -\frac{k}{8}(R^2 - x^2) + \frac{k}{4}x^2 \ln\frac{R}{|x|}.$$

Săgeata maximă se obține pentru $x = 0$ cu axa Oy dirijată în jos și este dată de

$$y_{max} = \frac{k}{8}R^2.$$

39. Să se studieze soluțiile ecuației diferențiale

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2h\frac{dx}{dt} + k^2x = H_0 \sin(\omega t + \varphi_0).$$

R: Această ecuație apare din studiul oscilațiilor slabe ale unui sistem cu un grad de libertate în jurul poziției sale de echilibru; h reprezintă coeficientul de rezistență, iar k^2 este coeficientul de elasticitate, $H_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$ reprezintă mărimea unei forțe exterioare ce acționează asupra sistemului.

Vom considera la început ecuația omogenă

$$x'' + 2hx' + k^2x = 0$$

care are ecuația caracteristică $r^2 + 2hr + k^2 = 0$. Deosebim mai multe cazuri:

I. $$h^2 - k^2 = -\alpha^2 < 0;$$

ecuația caracteristică are rădăcinile:

$$r_1 = -h + i\alpha,\ r_2 = -h - i\alpha$$

și soluția generală a ecuației omogene este:

$$\bar{x} = e^{-ht}(C_1 \cos \alpha t + C_2 \sin \alpha t).$$

Această soluție o punem sub forma

$$\bar{x} = A\, e^{-ht} \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} + \varphi\right),$$

unde am notat

$$C_1 = A \sin\varphi,\ C_2 = A\cos\varphi \text{ și } p = \frac{2\pi}{\tau}.$$

Soluția obținută indică oscilații amortizate.

II. $$h^2 - k^2 = \alpha^2 > 0.$$

Rădăcinile ecuației caracteristice sînt:

$$r_1 = -h + \alpha,\ r_2 = -h - \alpha$$

şi deci

$$\bar{x} = C_1 e^{-(h-\alpha)t} + C_2 e^{-(h+\alpha)t}$$

III. $$h^2 - k^2 = 0.$$

Ecuaţia caracteristică are rădăcina dublă $r = -h$, deci soluţia ecuaţiei omogene este:

$$\bar{x} = e^{-ht}(C_1 + C_2 t).$$

Pentru ecuaţia neomogenă căutăm o soluţie particulară de forma:

$$x_0 = A \sin(\omega t + \varphi_0 + \delta)$$

sau

$$x_0 = A[\sin(\omega t + \varphi_0)\cos\delta + \cos(\omega t + \varphi_0)\sin\delta]$$

o înlocuim în ecuaţia neomogenă şi, identificînd,

$$\cos\delta = \frac{(k^2 - \omega^2) H_0}{A[(k^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2]},$$

$$\sin\delta = \frac{2h\omega H_0}{A[(k^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2]}$$

ţinînd seama că $\cos^2\delta + \sin^2\delta = 1$, obţinem $A = 1$, deci:

$$x_0 = \frac{H_0[(k^2 - \omega^2)\sin(\omega t + \varphi_0) + 2h\omega\cos(\omega t + \varphi_0)]}{(k^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2}.$$

CAPITOLUL XV

SISTEME DE ECUAȚII DIFERENȚIALE

1. Să se construiască sistemul de ecuații diferențiale liniare care admite soluția generală:

$$\begin{cases} y = C_1 \dfrac{\sin x}{x} + C_2 \cos x \\ z = -C_1 \dfrac{\cos x}{x} + C_2 \sin x, \ x \neq 0. \end{cases}$$

R: Sistemul fiind liniar, este de forma:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + A_{11} y + A_{12} z = 0 \\ \dfrac{dz}{dx} + A_{21} y + A_{22} z = 0. \end{cases}$$

Soluțiile particulare sînt date de

$$(y_1, z_1) = \left(\frac{\sin x}{x}, -\frac{\cos x}{x}\right) \text{ și } (y_2, z_2) = (\cos x, \sin x).$$

Punînd condiția ca acestea să verifice fiecare din ecuațiile sistemului, obținem ecuațiile

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + A_{11} y + A_{12} z = 0 \\ \dfrac{dy_1}{dx} + A_{11} y_1 + A_{12} z_1 = 0 \\ \dfrac{dy_2}{dx} + A_{11} y_2 + A_{12} z_2 = 0 \end{cases}$$

şi:

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} + A_{21}y + A_{22}z = 0 \\ \frac{dz_1}{dx} + A_{21}y_1 + A_{22}z_1 = 0 \\ \frac{dz_2}{dx} + A_{21}y_2 + A_{22}z_2 = 0 \end{cases}$$

de unde rezultă

$$\begin{vmatrix} \frac{dy}{dx} & y & z \\ \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} & \frac{\sin x}{x} & -\frac{\cos x}{x} \\ -\sin x & \cos x & \sin x \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \frac{dz}{dx} & y & z \\ \frac{x\sin x + \cos x}{x^2} & \frac{\sin x}{x} & -\frac{\cos x}{x} \\ \cos x & \cos x & \sin x \end{vmatrix} = 0$$

care se mai scrie sub forma:

$$\begin{cases} x\frac{dy}{dx} + y\sin^2 x + z(x - \sin x\cos x) = 0 \\ x\frac{dz}{dx} - y(x + \sin x\cos x) + z\cos^2 x = 0 \end{cases}$$

2. Să se detemine soluţia sistemului

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y + \sin t, \\ \frac{dy}{dt} = 3y - 4x + \cos t, \end{cases}$$

care satisface condiţiile iniţiale $x(0) = 1$, $y(0) = -1$.

R: Sistemul omogen

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = 3x - y, \qquad \frac{dy}{dt} = 3y - 4x,$$

are ecuaţia caracteristică

$$\begin{vmatrix} r-3 & 1 \\ 4 & r-3 \end{vmatrix} = (r-3)^2 - 4 = 0$$

cu rădăcinile $r_1 = 1$, $r_2 = 5$. Soluția sistemului va fi de forma

$$x = A\,e^t + B\,e^{5t},\quad y = C\,e^t + D\,e^{5t}$$

pe care o înlocuim în (1). Obținem

$$A\,e^t + 5B\,e^{5t} \equiv 3A\,e^t + 3B\,e^{5t} - C\,e^t - D\,e^{5t}$$

$$C\,e^t + 5D\,e^{5t} \equiv 3C\,e^t + 3D\,e^{5t} - 4A\,e^t - 4B\,e^{5t}$$

identificînd coeficienții lui e^t, apoi pe cei ai lui e^{5t}, rezultă sistemul cu A, B, C, D,

$$2A - C = 0,\ 2B + D = 0$$

care dă

$$C = 2A,\quad D = -2B.$$

Soluția generală a sistemului omogen este așadar:

$$x = A\,e^t + B\,e^{5t}$$

$$y = 2A\,e^t - 2B\,e^{5t},\qquad t \in R.$$

O soluție particulară a sistemului neomogen este de forma:

$$(2)\qquad \begin{cases} x_0 = M\sin t + N\cos t, \\ y_0 = P\sin t + Q\cos t, \end{cases}$$

urmează să determinăm pe M, N, P, Q. Înlocuim pe (2) în sistemul neomogen:

$$M\cos t - N\sin t \equiv 3\,M\sin t + 3\,N\cos t - P\sin t - Q\cos t + \sin t$$

$$P\cos t - Q\sin t \equiv 2P\sin t + 3\,Q\cos t - 4\,M\sin t - 4\,N\cos t + \cos t$$

care conduc la

$$M = 3N - Q,\qquad N = -3M + P - 1,$$

$$P = 3Q - 4N + 1,\quad Q = -3P + 4M,$$

cu soluția

$$M = -\frac{21}{26},\ N = \frac{1}{26},\ P = -\frac{36}{26},\ Q = \frac{24}{26}.$$

Soluția generală a sistemului din enunț este

$$(3)\qquad \begin{cases} x = A\,e^t + B\,e^{5t} + \dfrac{1}{26}(-21\sin t + \cos t), \\ y = 2A\,e^t - 2B\,e^{5t} + \dfrac{1}{13}(-18\sin t + 12\cos t), \quad t \in R. \end{cases}$$

Pentru $t = 0$, condițiile inițiale $x(0) = 1$, $y(0) = -1$, conduc pentru A, B la sistemul

$$1 = A + B + \frac{1}{26}, \quad -1 = 2A - 2B + \frac{12}{13}$$

cu soluția

$$A = 0, \ B = \frac{25}{26}.$$

Soluția particulară se obține din

(3) $$\text{cu } A = 0, \ B = \frac{25}{26}.$$

3. Să se integreze sistemul

$$\begin{cases} t\,\frac{dx}{dt} = y + 1, \\ t\,\frac{dy}{dt} = 2x + t, \qquad t \in R - \{0\}. \end{cases}$$

Să se determine soluția particulară care satisface condițiile inițiale $x(1) = 1$, $y(1) = -1$.

R: Folosim metoda reducerii. Dacă derivăm a doua ecuație în raport cu t, obținem

$$t\,\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = 2\,\frac{dx}{dt} + 1$$

în care, dacă înlocuim pe $\frac{dx}{dt}$ obținut din prima ecuație din enunț, sîntem conduși la ecuația de tip Euler

(4) $$t^2\frac{d^2y}{dt^2} + t\,\frac{dy}{dt} - 2y = t + 2.$$

Ecuația omogenă

$$t^2\frac{d^2y}{dt} + t\,\frac{dy}{dt} - 2y = 0$$

are ecuația caracteristică

$$r(r-1) + r - 2 = 0, \ r_1 = -\sqrt{2}, \ r_2 = \sqrt{2},$$

cu soluția generală

$$y^* = C_1 \mid t \mid^{\sqrt{2}} + C_2 \mid t \mid^{-\sqrt{2}}, \qquad t \in R - \{0\}.$$

Pentru determinarea unei soluții particulare a ecuației neomogene (4) putem folosi metoda variației constantelor. Să observăm însă că putem, în cazul de față, căuta soluție de forma

$$y_0 = At + B$$

care introdusă în (4) conduce la

$$tA - 2(At + B) \equiv t + 2$$

deci $A = -1$, $B = -1$. Obţinem soluţia generală a ecuaţiei neomogene (4)

$$y = C_1 |t|^{\sqrt{2}} + C_2 |t|^{-\sqrt{2}} - t - 1. \tag{5}$$

Înlocuindu-l pe y astfel obţinut în a doua ecuaţie din enunţ, avem:

$$\sqrt{2}\, C_1 |t|^{\sqrt{2}} - \sqrt{2} C_2 |t|^{-\sqrt{2}} = 2x + t,$$

care dă

$$x = -\frac{1}{2} t + \frac{\sqrt{2}}{2} C_1 |t|^{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2} C_2 |t|^{-\sqrt{2}}; \tag{6}$$

(5) + (6) constituie soluţia generală a sistemului dat. Condiţiile iniţiale dau

$$\begin{cases} 1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} C_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} C_2, \\ -1 = C_1 + C_2 - 2 \end{cases}$$

cu soluţia

$$C_1 = \frac{3 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}, \quad C_2 = \frac{\sqrt{2} - 3}{2\sqrt{2}}. \tag{7}$$

Soluţia particulară cerută se obţine din (5) + (6), înlocuind pe C_1 şi C_2 cu valorile (7).

4. Să se găsească soluţia sistemului

$$\begin{cases} t \frac{dx}{dt} = 2y - 4x + t + 1, \\ t \frac{dy}{dt} = y + 3x + 2t \end{cases}$$

care satisface condiţiile iniţiale $x(1) = 1$, $y(1) = 2$.

R: Folosim metoda eliminării. Derivăm prima ecuaţie în raport cu t,

$$t \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = 2 \frac{dy}{dt} - 4 \frac{dx}{dt} + 1 \tag{8}$$

din ecuaţiile sistemului avem şi

$$y = \frac{1}{2} t \frac{dx}{dt} + 2x - \frac{1}{2} t - \frac{1}{2} \tag{8'}$$

şi

$$t \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2} t \frac{dx}{dt} + 5x + \frac{3}{2} t - \frac{1}{2}$$

care, înlocuite în (8), conduc la ecuația de tip Euler, neomogenă

$$t^2\frac{d^2x}{dt^2} + 5t\frac{dx}{dt} - t = t\frac{dx}{dt} + 10x + 3t - 1,$$

sau

$$t^2\frac{d^2x}{dt^2} + 4t\frac{dx}{dt} - 10x = 4t - 1.$$

Ecuația omogenă

$$t^2\frac{d^2x}{dt^2} + 4t\frac{dx}{dt} - 10x = 0 \tag{9}$$

are ecuația caracteristică

$$r(r-1) + 4r - 10 = 0$$

sau

$$r^2 + 3r - 10 = 0$$

cu rădăcinile $r_1 = 2$, $r_2 = -5$, deci soluția generală a lui (9) este

$$\tilde{x} = C_1 t^2 + \frac{C_2}{t^5}, \quad t \neq 0$$

Pentru ecuația neomogenă căutăm o soluție particulară de forma

$$x_0 = At + B$$

Trebuie să avem

$$4At - 10At - 10B \equiv 4t - 1,$$

$$A = -\frac{2}{3}, \; B = \frac{1}{10}$$

încît soluția generală a ecuației neomogene în x este

$$x = C_1 t^2 + \frac{C_2}{t^5} - \frac{2}{3}t + \frac{1}{10}. \tag{10}$$

Pe y îl obținem din (8′)

$$y = \frac{1}{2}t\left(2C_1 t - \frac{5C_2}{t} - \frac{2}{3}\right) + \tag{10′}$$

$$+ 2C_1 t^2 + 2\frac{C_2}{t^5} - \frac{4}{3}t + \frac{1}{5} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}$$

Condițiile inițiale dau

$$\begin{cases} C_1 + C_2 - \frac{2}{3} + \frac{1}{10} = 1, & C_1 = \frac{1}{7}\left[\frac{47}{10} + \frac{134}{15}\right] \\ 3C_1 - \frac{1}{2}C_2 - \frac{37}{15} = 2, & C_2 = -\frac{1}{7}\left[\frac{141}{5} - \frac{134}{15}\right] \end{cases}$$

înlocuite în (10) + (10′), obținem soluția particulară căutată.

5. Să se găsească soluția generală a sistemului de ecuații diferențiale

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) + y(t), \\ y'(t) = -4x(t) - y(t), \\ z'(t) = 4x(t) - 8y(t) - 2z(t), \qquad t \in R. \end{cases}$$

R: Notăm

$$U = \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix}, \quad U' = \begin{Vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Vmatrix}, \quad A = \begin{Vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{Vmatrix}.$$

Cu acestea, sistemul se scrie:

$$U' = A \cdot U.$$

Polinomul caracteristic al matricii A este

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = -(2 + \lambda)(\lambda - 1)^2$$

și astfel soluția generală a sistemului se scrie:

$$\bar{U}(t) = U_1(t) + U_2(t)$$

$$U_1(t) = A_1 \, e^{-2t}$$

$$U_2(t) = (A_2 + A_3 t) \, e^{t},$$

unde rămîne să determinăm matricele A_1, A_2, A_3.

Avem:

$$\begin{cases} e^{2t}[U_1'(t) - AU_1(t)] = 0 \\ e^{-t}[U_2'(t) - AU_2(t)] = 0 \end{cases} \tag{11}$$

sau

$$U_1'(t) = -2A_1 \, e^{-2t}$$

$$U_2'(t) = (A_3 + A_2 + A_1 t) \, e^{t}.$$

Înlocuind în (11), obținem:

$$-2A_1 = A \cdot A_1 \tag{12}$$

$$A_3 + A_2 = A \cdot A_2 \tag{13}$$

$$A_3 = A \cdot A_3. \tag{14}$$

Punînd

$$A_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}), \; i = 1, 2, 3$$

avem:

$$\begin{Vmatrix} -2a_{11} \\ -2a_{12} \\ -2a_{13} \end{Vmatrix} = A \cdot \begin{Vmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{Vmatrix},$$

de unde

$$\begin{cases} 5a_{11} + a_{12} = 0 \\ -4a_{11} + a_{12} = 0 \\ 4a_{11} - 8a_{12} = 0 \end{cases}$$

Rezultă $a_{11} = a_{12} = 0$, deci vectorul A_1 este de forma: $(0, 0, C_1)$, unde C_1 este un număr real.

Relațiile (13) și (14) dau:

$$\begin{Vmatrix} a_{21} + a_{31} \\ a_{22} + a_{32} \\ a_{23} + a_{33} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{Vmatrix}$$

și

$$\begin{Vmatrix} a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{Vmatrix}.$$

Fie:

$$\begin{cases} 2a_{21} + a_{22} = a_{31} \\ -4a_{21} - 2a_{22} = a_{32} \\ 4a_{21} - 8a_{22} - 3a_{23} = a_{33} \end{cases}$$

și

$$\begin{cases} 2a_{31} + a_{32} = 0 \\ -4a_{31} - 2a_{32} = 0 \\ 4a_{31} - 8a_{32} - 8a_{33} = 0. \end{cases}$$

Rezultă că

$$3a_{33} = -10\, a_{32},\ a_{32} = -2a_{31},\ a_{22} = a_{31} - 2a_{21},$$

$$2a_{23} = a_{32} + a_{33} - 10\, a_{22}$$

deci vectorii A_2 și A_3 sînt de forma:

$$A_2 = (3C_2,\ 9C_3 - 6C_2,\ 20\, C_2 - 16\, C_3),$$

$$A_3 = (9C_3,\ -18\, C_3,\ \ 60\, C_3)$$

unde C_2 și C_3 sînt numere reale.

Soluţiile sistemului sînt deci pentru $t \in R$

$$\begin{cases} x(t) = (3C_2 + 9C_3 t)\, e^t \\ y(t) = (9C_3 - 6C_2 - 18\, C_3 t)\, e^t \\ z(t) = C_1 e^{-2t} + (20\, C_2 - 16\, C_3 + 60\, C_3 t)\, e^t, \end{cases}$$

unde C_1, C_2, C_3 sînt numere reale.

6. Să se găsească soluţia generală a sistemului

$$t \frac{dx}{dt} = y + 1, \qquad t \frac{dy}{dt} = 4x + t$$

apoi să se determine soluţia particulară care satisface condiţiile iniţiale: $x(-1) = 1$, $y(-1) = 0$.

R: Dacă derivăm prima ecuaţie din enunţ, obţinem:

$$t^2 \frac{d^2x}{dt^2} + t \frac{dx}{dt} = t \frac{dy}{dt}$$

şi dacă înlocuim în a doua ecuaţie, rezultă ecuaţia de tip Euler

$$t^2 \frac{d^2x}{dt^2} + t \frac{dx}{dt} - 4x = t. \tag{15}$$

Ecuaţia omogenă dedusă din (15)

$$t^2 \frac{d^2x}{dt^2} + t \frac{dx}{dt} - 4x = 0$$

are ecuaţia caracteristică

$$r(r-1) + r - 4 = 0, \quad r_1 = 2, \quad r_2 = -2$$

prin urmare, soluţia generală a ecuaţiei omogene este:

$$x = C_1 t^2 + \frac{C_2}{t^2}, \qquad t \in R - \{0\}.$$

Pentru determinarea soluţiei particulare a ecuaţiei neomogene, folosim metoda variaţiei constantelor:

Avem

$$\begin{cases} C_1' t^2 + \frac{C_2'}{t^2} = 0, \\ 2C_1' t - 2\frac{C_2'}{t^3} = \frac{1}{t} \end{cases}$$

care dă

$$4C_1' = \frac{1}{t^2}; \quad C_1 = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{t} + A_1$$

$$4C_2' = -t^2; \quad C_2 = \frac{-1}{12} t^3 + A_2$$

și pentru $t \in R - \{0\}$, obținem

$$\begin{cases} x(t) = A_1 t^2 + \frac{A_2}{t^2} - \frac{t}{2} \\ y(t) = t\frac{dx}{dt} + 1 = t\left(2A_1 t - 2A_2 \frac{1}{t^3} - \frac{1}{2}\right) + 1 = \\ = 2A_1 t^2 - 2A_2 \frac{1}{t^2} - \frac{1}{2} t + 1 \end{cases}$$

care constituie soluția generală a sistemului dat. Condițiile inițiale dau:

$$\begin{cases} 1 = A_1 + A_2 + \frac{1}{2} \\ 0 = 2A_1 - 2A_2 + \frac{1}{2} + 1 \end{cases}$$

cu soluția

$$A_1 = -\frac{1}{8}, \quad A_2 = \frac{5}{8}.$$

Soluția particulară cerută este

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{1}{8} t^2 + \frac{5}{8} t^2 - \frac{1}{2} t, \\ y(t) = -\frac{1}{4} t^2 - \frac{5}{4} \frac{1}{t^2} - \frac{1}{2} t + 1, \qquad t \in R - \{0\}. \end{cases}$$

7. Folosind metoda aproximațiilor succesive, să se găsească primele trei aproximante ale soluției sistemului

$$\frac{dy}{dx} = yz + x, \quad \frac{dz}{dx} = y + x^2$$

definit în

$$D\colon [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$$

cu condițiile inițiale

$$y(0) = 1, \; z(0) = 0.$$

R: Avem

$$|yz + x| \leqslant 2, \; |y + x^2| \leqslant 2$$

în D, deci în intervalul

$$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

putem aplica metoda aproximațiilor succesive.

Luăm

$$y_0 = 1, \quad z_0 = 0$$

apoi

$$y_1 = 1 + \int_0^x t\,dt, \quad z_1 = \int_0^x (1 + t^2)\,dt$$

$$y_1 = 1 + \frac{1}{2}x^2, \quad z_1 = x + \frac{1}{3}x^3$$

$$2t + \frac{5}{6}t^3 + \frac{1}{6}t^5$$

$$y_2 = 1 + \int_0^x \left[\left(1 + \frac{1}{2}t^2\right)\left(t + \frac{1}{3}t^3\right) + t\right]dt$$

$$z_2 = \int_0^x \left(1 + \frac{1}{2}t^2 + t^2\right)dt$$

deci

$$y_2 = 1 + x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{1}{36}x^6, \quad z_2 = x + \frac{1}{2}x^3,$$

în acelaşi mod obţinem

$$y_3 = 1 + \int_0^x \left\{\left[1 + t^2 + \frac{5}{24}t^4 + \frac{1}{36}t^6\right]\left[1 + \frac{1}{2}t^3\right] + t\right\}dt$$

$$z_3 = \int_0^x \left[1 + t^2 + \frac{5}{24}t^4 + \frac{1}{36}t^6 + t^2\right]dt, \quad x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

8. Să se determine soluţia generală a sistemului de ecuaţii diferenţiale:

$$\frac{dU}{dt} - AU = 0,$$

unde am notat $U = (x(t), y(t), z(t))$

$$A = \begin{Vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{Vmatrix}$$

R: Polinomul caracteristic al matricii A este:

$$P(\lambda) = \begin{Vmatrix} -2-\lambda & 1 & -3 \\ -3 & -2-\lambda & 1 \\ 1 & -3 & -2-\lambda \end{Vmatrix} = -(4+\lambda)\begin{Vmatrix} -2-\lambda & 1 & -3 \\ -3 & -2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$P(\lambda) = -(4 + \lambda)(\lambda^2 + 2\lambda + 13),$$

cu rădăcinile

$$\lambda_1 = -4,$$

$$\lambda_{2,3} = -1 \pm i2\sqrt{3};$$

obținem astfel

$$U_1(t) = A_1\ e^{-4t}$$

$$U_2(t) = e^{-t}(A_2 \cos 2\sqrt{3}t + A_3 \sin 2\sqrt{3}\,t),$$

deci

$$U(t) = U_1(t) + U_2(t).$$

Pentru determinarea matricelor A_1, A_2, A_3, avem:

$$\begin{cases} U_1'(t) - AU_1(t) = 0 \\ U_2'(t) - AU_2(t) = 0 \end{cases}$$

$$U_1'(t) = -4A_1\ e^{-4t},$$

$$U_2'(t) = -e^{-t}(A_2 \cos 2\sqrt{3}t + A_3 \sin 2\sqrt{3}t) +$$

$$+ e^{-t}(-2\sqrt{3}A_2 \sin 2\sqrt{3}t + 2\sqrt{3}A_3 \cos 2\sqrt{3}t).$$

Punînd $A_i = (a_{i1},\ a_{i2},\ a_{i3})$, $i = 1, 2, 3$ obținem:

$$\begin{Vmatrix} -4a_{11} \\ -4a_{12} \\ -4a_{13} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{Vmatrix}$$

ceea ce revine la sistemul

$$\begin{cases} 2a_{11} + a_{12} - 3a_{13} = 0 \\ -3a_{11} + 2a_{12} + a_{13} = 0 \\ a_{11} - 3a_{12} + 2a_{13} = 0 \end{cases}$$

cu soluția $a_{11} = a_{13} = a_{12}$; deci vectorul A_1 este de forma: $(C_1,\ C_1,\ C_1)$ unde C_1 este arbitrar. La fel pentru $U_2(t)$

$$\begin{cases} -A_3 - 2\sqrt{3}A_2 = A \cdot A_3 \\ -A_2 + 2\sqrt{3}A_3 = A \cdot A_2 \end{cases}$$

ceea ce revine la:

$$\begin{cases} a_{21} - a_{22} + 3a_{23} = -2\sqrt{3}a_{31} \\ 3a_{21} + a_{22} - a_{23} = -2\sqrt{3}a_{32} \\ a_{21} - 3a_{22} - a_{23} = 2\sqrt{3}a_{33} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{31} - a_{32} + 3a_{33} = 2\sqrt{3}a_{21} \\ 3a_{31} + a_{32} - a_{33} = 2\sqrt{3}a_{22} \\ a_{31} - 3a_{32} - a_{33} = -2\sqrt{3}a_{23} \end{cases}$$

cu soluția:

$$A_3(C_2,\ C_3,\ -C_2 - C_3)$$

și

$$A_2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}(C_2+2C_3),\ \frac{1}{\sqrt{3}}(2C_2+C_3),\ \frac{1}{\sqrt{3}}(C_3-C_2)\right)$$

Soluția sistemului este deci, în $t\in R$,

$$x(t)=C_1e^{-4t}+e^{-t}\left[C_2\sin 2\sqrt{3}t-\frac{C_2+2C_3}{\sqrt{3}}\cos 2\sqrt{3}t\right]$$

$$y(t)=C_1e^{-4t}+e^{-t}\left[C_3\sin 2\sqrt{3}t+\frac{2C_2+C_3}{\sqrt{3}}\cos 2\sqrt{3}t\right]$$

$$z(t)=C_1e^{-4t}+e^{-t}\left[-(C_2+C_3)\sin 2\sqrt{3}t+\frac{C_3-C_2}{\sqrt{3}}\cos 2\sqrt{3}t\right].$$

9. Să se integreze ecuațiile lui Frenet în cazul curbei definită de

$$\rho=\sqrt{2}\operatorname{ch}\alpha,\ \tau=\sqrt{2}\operatorname{ch}\alpha.$$

Să se determine curba pentru care

$$\bar{r}(0)=\bar{i}+\bar{j};\quad \bar{t}(0)=\frac{\bar{i}+\bar{k}}{\sqrt{2}};\quad \bar{n}(0)=\bar{j};\quad \bar{b}(0)=\frac{\bar{k}-\bar{i}}{\sqrt{2}}.$$

R: Sistemul lui Frenet în acest caz este:

$$\frac{d\bar{t}}{ds}=\frac{1}{\sqrt{2}\operatorname{ch}\alpha}\bar{n}$$

$$\frac{d\bar{b}}{ds}=-\frac{1}{\sqrt{2}\operatorname{ch}\alpha}\bar{n}$$

$$\frac{d\bar{n}}{ds}=-\frac{1}{\sqrt{2}\operatorname{ch}\alpha}\bar{t}+\frac{1}{\sqrt{2}\operatorname{ch}\alpha}\bar{b}.$$

Dar:

$$\frac{d\bar{t}}{d\alpha}\frac{d\alpha}{ds}=\frac{1}{\sqrt{2}\operatorname{ch}\alpha}\bar{n}$$

luînd $\frac{ds}{d\alpha}=\sqrt{2}\operatorname{ch}\alpha$ obținem sistemul:

$$\frac{d\bar{t}}{d\alpha}=\bar{n},\quad \frac{d\bar{b}}{d\alpha}=-\bar{n};\ \frac{d\bar{n}}{d\alpha}=-\bar{t}+\bar{b}$$

sistem cu coeficienți constanți.

Forma matricială a acestui sistem este:

$$\begin{Vmatrix}\frac{d\bar{t}}{d\alpha}\\ \frac{d\bar{b}}{d\alpha}\\ \frac{d\bar{n}}{d\alpha}\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}0&0&1\\0&0&-1\\-1&1&0\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}\bar{t}\\ \bar{b}\\ \bar{n}\end{Vmatrix}.$$

Polinomul caracteristic asociat matricii sistemului este:

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 + 2).$$

Soluția generală a sistemului este de forma:

$$\bar{t} = \bar{A}_1 + \bar{A}_2 \cos \alpha \sqrt{2} + A_3 \sin \alpha \sqrt{2}$$

$$\bar{b} = \bar{B}_1 + \bar{B}_2 \cos \alpha \sqrt{2} + \bar{B}_3 \sin \alpha \sqrt{2}$$

$$\bar{n} = \bar{C}_1 + \bar{C}_2 \cos \alpha \sqrt{2} + \bar{C}_3 \sin \alpha \sqrt{2}$$

Înlocuind în sistem obținem legătura între constante și deci soluția generală

$$\bar{t}(\alpha) = \bar{A}_1 - \frac{\bar{C}_3}{\sqrt{2}} \cos \alpha \sqrt{2} + \frac{\bar{C}_2}{\sqrt{2}} \sin \alpha \sqrt{2}$$

$$\bar{b}(\alpha) = \bar{A}_1 + \frac{\bar{C}_3}{\sqrt{2}} \cos \alpha \sqrt{2} - \frac{\bar{C}_2}{\sqrt{2}} \sin \alpha \sqrt{2}$$

$$\bar{n}(\alpha) = \bar{C}_2 \cos \alpha \sqrt{2} + \bar{C}_3 \sin \alpha \sqrt{2}$$

Punînd condițiile inițiale obținem:

$$\bar{t}(0) = \frac{\bar{i} + \bar{k}}{\sqrt{2}} = \bar{A}_1 - \frac{\bar{C}_3}{\sqrt{2}}$$

$$\bar{b}(0) = \frac{\bar{k} - \bar{i}}{\sqrt{2}} = \bar{A}_1 + \frac{\bar{C}_3}{\sqrt{2}}$$

$$\bar{n}(0) = \bar{j} = \bar{C}_2$$

sau încă

$$\bar{A}_1 = \frac{\bar{k}}{\sqrt{2}}, \quad \bar{C}_3 = -\bar{i}, \quad \bar{C}_2 = \bar{j}$$

rezultă

$$\bar{t}(\alpha) = \frac{\bar{k}}{\sqrt{2}} + \frac{\bar{i}}{\sqrt{2}} \cos \alpha \sqrt{2} + \frac{\bar{j}}{\sqrt{2}} \sin \alpha \sqrt{2}.$$

Integrînd ecuația:

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{t}, \quad \frac{d\bar{r}}{d\alpha} = \bar{t} \sqrt{2} \operatorname{ch} \alpha;$$

sau:

$$\frac{d\bar{r}}{d\alpha} = \bar{k} \operatorname{ch} \alpha + \vec{i} \operatorname{ch} \alpha \cos \alpha \sqrt{2} + \bar{j} \operatorname{ch} \alpha \sin \alpha \sqrt{2}$$

obținem

$$\bar{r}(\alpha) = \bar{A}_0 + \bar{k}\,\mathrm{sh}\,\alpha + \frac{\vec{i}}{3}(\mathrm{sh}\,\alpha\cos\alpha\sqrt{2} + \sqrt{2}\,\mathrm{ch}\,\alpha\sin\alpha\sqrt{2}) +$$

$$+\frac{\vec{j}}{3}(\mathrm{sh}\,\alpha\sin\alpha\sqrt{2} - \sqrt{2}\,\mathrm{ch}\,\alpha\cos\alpha\sqrt{2})$$

și cum

$$\bar{r}(0) = \vec{i} + \vec{j} = \bar{A}_0 - \frac{\sqrt{2}}{3}\vec{j}$$

obținem

$$\bar{r}(\alpha) = \vec{i}\,\frac{3 + \mathrm{sh}\,\alpha\cos\alpha\sqrt{2} + \sqrt{2}\,\mathrm{ch}\,\alpha\sin\alpha\sqrt{2}}{3} +$$

$$+\vec{j}\,\frac{3 - \sqrt{2} + \mathrm{sh}\,\alpha\sin\alpha\sqrt{2} - \sqrt{2}\,\mathrm{ch}\,\alpha\cos\alpha\sqrt{2}}{3} + \bar{k}\,\mathrm{sh}\,\alpha.$$

10. Să se găsească soluția generală a sistemului

$$\begin{cases} x^2y'' + xz' + y + z = x + 1, \\ x^2z'' + xy' - y - z = -x - 1, \end{cases}$$

apoi să se determine soluția particulară care satisface condițiile inițiale

$$y(1) = 6,\ y'(1) = 10,\ z(1) = 2,\ z'(1) = 5.$$

R: Facem schimbarea de variabilă independentă $e^t = |x|$, avem

$$\frac{dy}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt},\ \frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

sistemul devine

$$y'' + y + z = e^t + 1,$$
$$z'' - y - z = -e^t - 1,$$

deci

$$y = z'' - z + e^t + 1$$

care înlocuită în ecuație dă

$$z'''' = -e^t$$

cu soluția

$$z = c_0 + c_1t + c_2t^2 + c_3t^3 - e^t,$$

care ne dă imediat și pe y

$$y = 2c_2 - c_0 + (6c_3 - c_1)t - c_2t^2 - c_3t^3 + e^t + 1.$$

Revenind la variabila inițială obținem soluția generală

$$z = c_0 + c_1\ln|x| + c^2\ln^2|x| + c_3\ln^3|x| - x,$$
$$y = 2c_2 - c_0 + (6c_3 - c_1)\ln|x| - c_2\ln^2|x + c_3\ln^3|x| + x + 1.$$

Condiţiile iniţiale conduc la sistemul

$$\begin{cases} 2c_2 - c_0 + 2 = 6, & c_0 - 1 = 2, \\ 6c_3 - c_1 + 1 = 10, & c_1 - 1 = 5, \end{cases}$$

cu soluţia

$$c_0 = 3, \quad c_1 = 6, \quad c_2 = \frac{7}{2}, \quad c_3 = \frac{5}{2}$$

soluţia particulară cerută este

$$\begin{cases} y = 4 + 9\ln|x| - \frac{7}{2}\ln^2|x| - 3\ln^3|x| + x + 1, \\ z = 3 + 6\ln|x| + \frac{7}{2}\ln^2|x| + \frac{5}{2}\ln^3|x| - x. \end{cases}$$

11. Să se determine soluţia generală a sistemului de ecuaţii diferenţiale liniare

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} - x + y = t, \\ \frac{dy}{dt} - 2x + 2y = 1, \quad t \in R. \end{cases}$$

Să se determine soluţia particulară pentru care

$$x(0) = x'(0) = \frac{26}{27} \text{ şi } y(0) = -\frac{56}{27}.$$

R: Introducem funcţia $u(t) = \frac{dx}{dt}$ şi sistemul devine

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + 2u - x + y = t, \\ \frac{dy}{dt} - 2x + 2y = 1, \\ \frac{dx}{dt} - u = 0. \end{cases}$$

Considerăm sistemul omogen pentru care căutăm soluţii de forma:

$$x = Ae^{rt}, \quad y = Be^{rt}, \quad u = Ce^{rt}.$$

Ecuaţia caracteristică a sistemului este:

$$\begin{vmatrix} r & 0 & -1 \\ -2 & r+2 & 0 \\ -1 & 1 & r+2 \end{vmatrix} = r(r+1)(r+3) = 0,$$

deci soluția generală a sistemului omogen este de forma:

$$\begin{cases} x = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-3t} + A_3, \\ y = B_1 e^{-t} + B_2 e^{-3t} + B_3, \\ z = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t} + C_3. \end{cases}$$

Pentru $r = -1$ obținem sistemul care dă constantele arbitrare:

$$-A_1 - C_1 = 0, \quad -2A_1 + B_1 = 0 \text{ deci: } B_1 = 2A_1, \quad C_1 = -A_1.$$

Pentru $r = -3$ obținem sistemul:

$$\begin{cases} -3A_2 - C_2 = 0, \\ -2A_2 - B_2 = 0, \end{cases}$$

care are soluția:

$$C_2 = -3A_2, \quad B_2 = -2A_2.$$

Pentru $r = 0$, obținem:

$$-C_3 = 0, \quad -A_3 + B_3 = 0, \quad \text{sau } B_3 = A_3.$$

Soluția generală a sistemului omogen este:

$$\begin{cases} x = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-3t} + A_3, \\ y = 2A_1 e^{-t} - 2A_2 e^{-3t} + A_3, \\ z = -A_1 e^{-t} - 3A_2 e^{-3t}. \end{cases}$$

O soluție a sistemului neomogen se obține aplicind metoda variației constantelor din sistemul:

$$\begin{cases} A_1' e^{-t} + A_2' e^{-3t} + A_3' = 0, \\ 2A_1' e^{-t} - 2A_2' e^{-3t} + A_3' = 1, \\ -A_1' e^{-t} - 3A_2' e^{-3t} = t. \end{cases}$$

Obținem:

$$A_1' = \frac{1-t}{2} e^{t}, \quad A_2' = -\frac{t+1}{6} e^{3t}; \quad A_3' = \frac{2t-1}{3}.$$

Prin integrare se obține:

$$A_1 = e^{t}\left(1 - \frac{t}{2}\right) + k_1; \quad A_2 = -\frac{1}{6}\left(\frac{t}{3} + \frac{2}{9}\right) e^{3t} + k_2$$

$$A_3 = \frac{t^2}{3} - \frac{t}{3} + k_3.$$

Soluția generală a sistemului neomogen este:

$$\begin{cases} x = k_1 e^{-t} + k_2 e^{-3t} + k_3 + \frac{26}{27} + \frac{t^2}{3} - \frac{8t}{9} \\ y = 2k_1 e^{-t} - 2k_2 e^{-3t} + k_3 + \frac{t^2}{3} - \frac{11t}{9} - \frac{56}{27} \\ u = -k_1 e^{-t} - 3k_2 e^{-3t} + \frac{2t}{3} - \frac{8}{9}, \quad t \in R \end{cases}$$

și, dacă înlăturăm pe u obținem soluția sistemului inițial.

Punînd condițiile inițiale rezultă

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ -k_1 - 3k_2 = \frac{8}{6} + \frac{26}{27} \\ 2k_1 - 2k_2 + k_3 = 0 \end{cases}$$

deci:

$$k_1 = -\frac{25}{27}, \quad k_2 = -\frac{25}{3 \cdot 27}, \quad k_3 = \frac{100}{81};$$

și astfel obținem soluția pentru $t \in R$,

$$\begin{cases} x_0 = -\frac{25}{27} e^{-t} - \frac{25}{3 \cdot 27} e^{-3t} + \frac{100}{81} + \frac{26}{27} + \frac{t^2}{3} - \frac{8t}{9} \\ y_0 = -\frac{50}{27} e^{-t} + \frac{50}{3 \cdot 27} e^{-3t} + \frac{100}{81} + \frac{t^2}{3} - \frac{11t}{9} + \frac{56}{27}. \end{cases}$$

12. Se dă sistemul

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} + y_2 = 0, \\ \frac{dy_2}{dt} + y_3 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dy_{n-1}}{dt} + y_n = 0, \\ \frac{dy_n}{dt} + y_1 = 0. \end{cases}$$

Se cere soluția generală.

R: Ecuația caracteristică a sistemului este

$$\begin{vmatrix} r & 1 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & r & 1 & 0 \ldots 0 & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots r & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & r \end{vmatrix} = 0$$

și pentru $n = 2m$ se scrie

$$r^{2m} - 1 = 0,$$

iar pentru $n = 2m + 1$

$$r^{2m+1} + 1 = 0.$$

Pentru $n = 2m$ avem

$$r_k = \cos\frac{k\pi}{m} + i\sin\frac{k\pi}{m}, \quad k = 0, 1, \ldots, 2m - 1$$

deci

$$y_{1k} = \exp\left(\cos\frac{k\pi}{m} + i\sin\frac{k\pi}{m}\right)x$$

și

$$y_1 = \sum_0^{2m-1} C_k \exp\left(\cos\frac{k\pi}{m} + i\sin\frac{k\pi}{m}\right)x,$$

să observăm că din sistem avem

$$y_p = (-1)^{p-1}\frac{\mathrm{d}^{p-1}y_1}{\mathrm{d}x^{p-1}}$$

deci

$$y_p = \sum_{k=0}^{2m-1}(-1)^{p-1}\left(\cos\frac{k\pi(p-1)}{m} + i\sin\frac{k\pi(p-1)}{m}\right)y_1$$

sau

$$y_p = \sum_0^{2m-1}(-1)^{p-1}C_k\exp\left[x\cos\frac{k\pi}{m} + i\left(x\sin\frac{k\pi}{m} + \frac{k\pi(p-1)}{m}\right)\right]$$

$p = 1, 2, \ldots, 2m$. Soluția obținută este sub formă complexă. Pentru $n = 2m + 1$ se procedează în mod analog.

Metoda II. Prin eliminare se găsește că y_1 verifică ecuația

$$y_1^{(n)} + (-1)^{n-1}y_1 = 0.$$

13. Să se integreze sistemul simetric

$$\frac{\mathrm{d}x}{z + \mathrm{e}^x} = \frac{\mathrm{d}y}{z + \mathrm{e}^y} = \frac{\mathrm{d}z}{z^2 - \mathrm{e}^{x+y}}.$$

R: Observăm că avem

$$\frac{z\,\mathrm{d}x}{z(z + \mathrm{e}^x)} = \frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}y}{(z + \mathrm{e}^y)\mathrm{e}^x} = \frac{\mathrm{d}z}{z^2 - \mathrm{e}^{x+y}} = \frac{z\,\mathrm{d}x - \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}y - \mathrm{d}z}{0}$$

iar

$$z\,\mathrm{d}x - \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}y - \mathrm{d}z = 0 \quad \text{sau} \quad \mathrm{d}y = z\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x - \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}z$$

este o diferențială totală deoarece

$$\frac{\partial}{\partial z}(z\,e^{-x}) = \frac{\partial}{\partial x}(-e^{-x}) = e^{-x}$$

obținem

$$y = \int_{x_0}^{x} z_0 e^{-x}\,dx - \int_{x_0}^{x} e^{-x}\,dx$$

sau

$$y = -z\,e^{-x} + C_1. \tag{α}$$

Avem și

$$\frac{e^y\,dx}{e^y(z+e^x)} = \frac{z\,dy}{z(z+e^y)} = \frac{dz}{z^2 - e^{x+y}} = \frac{dz - z\,dy + e^y\,dx}{0}$$

sau

$$dx = ze^{-y} - e^{-y}\,dz$$

care este tot diferențiala totală deoarece

$$\frac{\partial}{\partial z}(ze^{-y}) = \frac{\partial}{\partial y}(-e^{-y}) = e^{-y}$$

rezultă

$$x = \int_{y_0}^{y} z\,e^{-y}\,dy - \int_{z_0}^{z} e^{-y}\,dz$$

sau

$$x = -ze^{-y} + C_2.$$

Soluția generală a sistemului este

$$\begin{cases} x = -z\,e^{-y} + C_2, \\ y = -z\,e^{-x} + C_1. \end{cases}$$

14. Să se determine soluția generală a sistemului de ecuații

$$\begin{cases} (t^2+1)\,dx = (-tx + y)\,dt, \\ (t^2+1)\,dy = -(x + ty)\,dt. \end{cases}$$

R: Sistemul sub formă simetrică se scrie:

$$\frac{dx}{y - tx} = \frac{dy}{-x - ty} = \frac{dt}{t^2+1}.$$

O combinație integrabilă este:

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{-t(x^2+y^2)} = \frac{dt}{t^2+1}$$

sau

$$\frac{d(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = -\frac{2t}{t^2+1}dt$$

obținem integrala primă

$$x^2+y^2 = \frac{C_1}{t^2+1}.$$

O altă combinație integrabilă se obține din:

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2} = \frac{dt}{t^2+1}$$

care se mai scrie sub forma:

$$\frac{d\left(\frac{x}{y}\right)}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \frac{dt}{t^2+1}$$

și integrînd:

$$\operatorname{arctg}\frac{x}{y} = \operatorname{arctg} t + \operatorname{arctg} C_2$$

sau încă

$$\frac{x}{y} = \frac{C_2+t}{1-C_2t}$$

Soluția generală a sistemului este dată de

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{C_2+t}{1-C_2t} \\ (x^2+y^2)(1+t^2) = C_1^2 \end{cases}$$

sau:

$$x = \beta\frac{\alpha+t}{1+t^2},\quad y = \beta\frac{1-\alpha t}{1+t^2},$$

unde

$$\beta = C_2,\quad \alpha = \frac{C_1}{\sqrt{1+C_2^2}}.$$

15. Să se integreze sistemul

$$\frac{dx_1}{-x_2+x_3+2x_4} = \frac{dx_2}{-x_3-2x_4-x_1} = \frac{dx_3}{2x_4+x_1-x_2} = \frac{2\,dx_4}{x_1-x_2+x_3}.$$

R: Din șirul de rapoarte obținem

$$\frac{dx_1-dx_2+dx_3+2dx_4}{3(x_1-x_2+x_3+2x_4)} = \frac{dx_1}{-x_2+x_3+2x_4}$$

folosind raportul al doilea și al treilea rezultă

$$\frac{d(x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4)}{3(x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4)} = -\frac{d(x_2 + x_3)}{x_2 + x_3},$$

deci o integrală primă este

$$(\alpha) \qquad (x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4)\,(x_2 + x_3)^3 = C_1;$$

dacă folosim raportul al treilea și al patrulea ne dă

$$\frac{d(x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4)}{3(x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4)} = -\frac{d(x_3 - 2x_4)}{x_3 - 2x_4},$$

care furnizează a doua integrală primă

$$(x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4)\,(x_3 - 2x_4)^3 = C_2$$

folosind raportul al doilea și al patrulea obținem

$$\frac{d(x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4)}{3(x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4)} = -\frac{d(2x_4 + x_2)}{2x_4 + x_2},$$

care dă

$$(\gamma) \qquad (x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4)\,(2x_4 + x_2)^3 = C_3$$

$(\alpha) + (\beta) + (\gamma)$ constituie integrala generală a sistemului.

16. Să se determine liniile de cîmp ale cîmpului vectorial

$$\bar{V} = (y^2 - 2x^2)\,\bar{i} - 3xy\bar{j} - 2xz\bar{k}, \qquad (x,\ y,\ z) \in R^3$$

apoi să se determine linia care trece prin punctul $(1,\ 1,\ -1)$.

R: Ecuațiile liniilor de cîmp sînt

$$\frac{dx}{y^2 - 2x^2} = \frac{dy}{-3xy} = \frac{dz}{-2xz}$$

avem imediat combinația integrabilă

$$\frac{dy}{-3xy} = \frac{dz}{-2xz}$$

sau

$$2\,\frac{dy}{y} = 3\,\frac{dz}{z}$$

cu integrala primă

$$y^2 = C_1 z^3,$$

avem și

$$\frac{x\,dx}{x(y^2 - 2x^2)} = \frac{y\,dy}{-3xy^2} = \frac{z\,dz}{-2xz^2} = -\frac{1}{2}\,\frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{x(x^2 + y^2 + z^2)}$$

sau

$$4\frac{dy}{y} = 3\frac{d(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2}$$

cu integrala primă

$$y^4 = C_2(x^2+y^2+z^2)^3.$$

Soluția generală a sistemului se obține intercalînd cele două familii de suprafețe, anume:

(*)
$$\begin{cases} y^2 = C_1 z^3, \\ y^4 = C_2(x^2+y^2+z^2)^3. \end{cases}$$

Dacă punem în (*) $x=1,\ y=1,\ z=1$, obținem $C_1=-1\ C_2=\frac{1}{27}$, deci soluția particulară cerută este definită de

$$\begin{cases} y^2+z^3=0 \\ 27y^4=(x^2+y^2+z^2)^3. \end{cases}$$

17. Să se determine curbele ortogonale la familia de suprafețe

$$(x^2+y^2)^2 = Cz, \qquad (x,\ y,\ z)\in R^3.$$

R: Curbele ortogonale familiei $F(x,\ y,\ z)=C$ sînt date de sistemul simetric

$$\frac{dx}{F'_x} = \frac{dy}{F'_y} = \frac{dz}{F'_z}$$

care în cazul din enunț, devine

$$\frac{z\,dx}{4x(x^2+y^2)} = \frac{z\,dy}{4y(x^2+y^2)} = -\frac{z^2\,dz}{(x^2+y^2)^2}$$

sau

$$\frac{dx}{4x} = \frac{dy}{4y} = -\frac{z\,dz}{x^2+y^2},$$

cu combinațiile integrabile

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \text{ și } \frac{x\,dx+y\,dy}{4(x^2+y^2)} = -\frac{z\,dz}{x^2+y^2}$$

care ne dau integralele prime

$$\begin{cases} x = C_1 y, \\ x^2+y^2+4z^2 = C_2. \end{cases}$$

Intersecțiile celor două familii de suprafețe astfel determinate reprezintă curbele cerute în enunț.

18. Un condensator $c_1 = 10^{-3}\ F$ este încărcat la tensiunea $u_0 = 100\ V$, apoi el se descarcă în bobina de inductanță $L_1 = 1{,}6\ H$ iar oscilațiile electrice

se produc prin descărcarea condensatorului se transmit în bobina de inductanţă $L_2 = 0{,}4H$ a unui alt circuit cuplat magnetic cu inductanţa L prin inductanţa mutuală $M = 0{,}5\,H$. În circuitul doi se află un condensator $C_2 = 4 \cdot 10^{-3}F$. Circuitul cu schema electrică este conform figurii 48, unde s-a neglijat rezistenţa ohmică.

Din teorema a doua a lui Kirchhoff aplicată circuitului la timpul $t > 0$ rezultă sistemul de ecuaţii:

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} - u_1 = 0$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} + u_2 = 0 \tag{1}$$

unde

$$u_1 = \frac{1}{c_1}\int i_1\,dt \text{ şi } u_2 = \frac{1}{c_2}\int i_2\,dt \tag{2}$$

sînt tensiunile la bornele condensatoarelor la timpul „t" considerat.

Să se determine variaţiile în raport cu timpul ale lui i_1, i_2, u_1, u_2.

R: Sistemul rezultat este un sistem de patru ecuaţii integrodiferenţiale cu patru funcţii recurente, cu coeficienţi constanţi şi omogeni. Dacă derivăm ecuaţia (2) avem:

$$i_1 = -c_1 \frac{du_1}{dt}, \quad i_2 = c_2 \frac{du_2}{dt} \tag{3}$$

înlocuind (3) în (1), avem:

$$\begin{cases} Mc_2 \dfrac{d^2u_2}{dt^2} - L_1c_1 \dfrac{d^2u_1}{dt^2} - u_1 = 0 \\ Mc_1 \dfrac{d^2u_1}{dt^2} - L_2c_2 \dfrac{d^2u_2}{dt^2} - u_2 = 0, \qquad t > 0 \end{cases} \tag{4}$$

Din prima ecuaţie (4) scoatem:

$$\frac{d^2u_2}{dt^2} = \frac{L_1c_1}{Mc_2}\frac{d^2u_1}{dt^2} + \frac{1}{Mc_2}u_1 \tag{5}$$

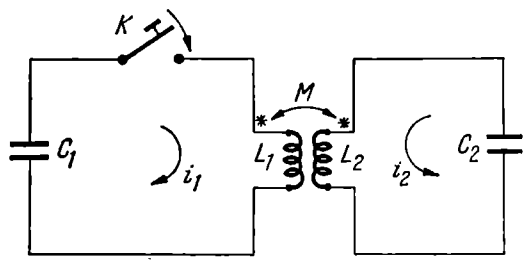

Fig. 48

apoi derivăm ecuația a doua (4) de două ori și cu (5) avem:

$$c_1c_2(L_1L_2 - M^2)\frac{d^4u_1}{dt^4} + (L_1c_1 + L_2c_2)\frac{d^2u_1}{dt^2} + u_1 = 0. \qquad (6)$$

Ecuația caracteristică este:

$$c_1c_2(L_1L_2 - M^2)r^4 + (L_1c_1 + L_2c_2)r^2 + 1 = 0$$

al cărei realizant este:

$$\Delta = (L_1c_1 + L_2c_2)^2 - 4\,c_1c_2(L_1L_2 - M^2) = (L_1c_1 - L_2c_2)^2 + 4c_1c_2M^2 > 0.$$

Notăm cu $r^2 = y$, atunci:

$$y_{1,2} = \frac{-(L_1c_1 + L_2c_2) \pm \sqrt{(L_1c_1 - L_2c_2)^2 + 4c_1c_2M^2}}{2c_1c_2(L_1L_2 - M^2)}.$$

Cum $y_1 \cdot y_2 > 0$, și din motive constructive $L_1L_2 - M^2 > 0$, rezultă că ambele rădăcini sînt negative, adică:

$$y_1 = -a^2, \quad y_2 = -b^2$$

sau

$$r_{1,2} = \pm ai, \quad r_{3,4} = \pm bi$$

soluțiile sînt

$$u_1 = A\cos at + B\sin at + C\cos bt + D\sin bt.$$

Din (5) avem:

$$\frac{d^2u_2}{dt^2} = \frac{1}{Mc_2}[(1 - L_1c_1a^2)(A\cos at + B\sin at) +$$

$$+ (1 - L_1c_1b^2)(C\cos bt + D\sin bt)]$$

$$u_2 = \frac{1}{Mc_2}\left[\left(L_1c_1 - \frac{1}{a^2}\right)(A\cos at + B\sin at) +\right.$$

$$\left. + \left(L_1c_1 - \frac{1}{b^2}\right)(C\cos bt + D\sin bt)\right] + ET + F, \qquad t > 0$$

dar $E = 0$, $F = 0$, deoarece u_2 are aceeași formă ca u_1.

$$i_1 = -c_1\frac{du_1}{dt} = c_1[a(B\cos at - A\sin at) + b(D\cos bt - C\sin bt]$$

$$i_2 = c_2\frac{du_2}{dt} = \frac{1}{M}\left[\left(L_1c_1a - \frac{1}{a}\right)(B\cos at - A\sin at) +\right.$$

$$\left. + \left(L_1c_1b - \frac{1}{b}\right)(D\cos bt - C\sin bt)\right].$$

Pentru determinarea constantelor ținem seama de condițiile inițiale.

Pentru $t = 0$, avem $i_1(0) = i_2(0) = 0$, $u_1(0) = u_0$, $u_2(0) = 0$.

Avem:

$$u_0 = A + C;\ \left(L_1c_1 - \frac{1}{a^2}\right)A + \left(L_1c_1 - \frac{1}{b^2}\right)C = 0$$

$$aB + bD = 0;\ \left(L_1c_1a - \frac{1}{a}\right)B + \left(L_1c_1b - \frac{1}{b}\right)D = 0.$$

Rezolvate conduc la

$$A = \frac{a^2(L_1c_1b^2 - 1)}{b^2 - a^2}u_0, \quad C = \frac{b^2(a^2L_1c_1 - 1)}{a^2 - b^2}u_0, \quad B = D = 0.$$

Soluțiile devin

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{a^2(L_1c_1b^2 - 1)}{b^2 - a^2}u_0 \cos at + \dfrac{b^2(a^2L_1c_1 - 1)}{a^2 - b^2}u_0 \cos bt \\ u_2 = \dfrac{(a^2L_1c_1 - 1)(b^2L_1c_1 - 1)}{Mc_2(b^2 - a^2)}u_0 (\cos at - \cos bt) \end{cases}$$

și

$$\begin{cases} i_1 = c_1a\dfrac{a^2(L_1c_1b^2 - 1)}{a^2 - b^2}u_0 \sin at + c_1b\dfrac{b^2(a^2L_1c_1 - 1)}{b^2 - a^2}u_0 \sin bt \\ i_2 = \dfrac{(L_1c_1a^2 - 1)(L_1c_1b^2 - 1)}{M(a^2 - b^2)}(a \sin at - b \sin bt), \qquad t > 0. \end{cases}$$

Numeric, pentru datele din enunț avem:

$$y_1 = -385,\ y_2 = -1670$$

$$a^2 = 385, \quad b^2 = 1670; \qquad a = 19{,}6; \qquad b = 40{,}6,$$

de unde

$$A = 0{,}5\,u_0, \quad B = 0{,}5\,u_0$$

$$\frac{(a^2L_1c_1 - 1)(b^2L_1c_1 - 1)}{Mc_2(b^2 - a^2)}u_0 = -0{,}25\,u_0$$

deci:

$$\begin{cases} u_1 = 50 \cos 19{,}6\,t + 50 \cos 40{,}6\,t \\ u_2 = 25 \cos 19{,}6\,t - 25 \cos 40{,}6\,t \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_1 = -0{,}98 \sin 19{,}6\,t + 2{,}03 \sin 40{,}6\,t \\ i_2 = 1{,}96 \sin 19{,}6\,t - 4{,}06 \sin 40{,}6\,t; \qquad t > 0; \end{cases}$$

deoarece rezistența circuitului este nulă, oscilațiile se întrețin indefinit datorită schimbului energiei între cîmpul electric al condensatorilor și cîmpul magnetic al bobinelor. Este cazul ideal. În realitate nu se poate neglija rezistența bobinelor și nici condensatoarele nu au izolație perfectă, deci oscilațiile se amortizează în cazul real practic.

19. Să se aproximeze soluţia ecuaţiei $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$ în vecinătatea punctului (0, 0) printr-un polinom de gradul şapte folosind Metoda Runge-Kutta.

R: Polinomul de gradul şapte care aproximează soluţia ecuaţiei în vecinătatea punctului (0, 0) este dat de:

$$y(x) \sim P_7(x) = y(0) + \frac{x}{1!}\, y'(0) + \frac{x^2}{2!}\, y''(0) + \ldots + \frac{x^7}{7!}\, y^{(7)}(0),$$

unde

$$y'(0) = f(0, 0) = 0$$

şi dacă

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$y''(0) = \frac{df(x, y(x))}{dx}\Big|_{(0,0)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(0,0)} = 2x + 2y(x^2 + y^2)\Big|_{(0,0)} = 0$$

$$y'''(0) = 2 + 2y'(x^2 + y^2) + 2y(2x + 2yy')\Big|_{(0,0)} = 2$$

$$y^{IV}(0) = (y'''(x))'_{(0,0)} = 2y''x^2 + 6y''y^2 + 4y + 8y'x + 12\, y'^2 y\Big|_{(0,0)} = 0$$

$$y^{V}(0) = (y^{IV})'_{(0,0)} = (12y''x + 2y'''x^2 + 6y'''y^2 + 12yy''^2 +$$

$$+ 12y' + 24y'yy'' + 12y'^3)_{(0,0)} = 0$$

$$y^{VI}(0) = 16y'''x + 24y'' + 2y^{IV}x^2 + 6y^{IV}y^2 + 36yy'y''' +$$

$$+ 12y'y''^2 + 24yy'y'' + 60y''y'^2 + 24yy''^2\Big|_{(0,0)} = 0$$

$$y^{VII}(0) = 16y^{VI}x + 4oy''' + 4y^{IV}x + 2y^{V}x^2 + 48y^{IV}yy' +$$

$$+ 6y^{V}y^2 + 96y'^2y''' + 132\, yy''y''' + 12y''^2 + 24y'^2y'' +$$

$$+ 120\, y''^2y' + 24y'y''^2\Big|_{(0,0)} = 40$$

Obţinem astfel:

$$y(x) \sim \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{126} = \frac{x^3}{3}\left(1 + \frac{x^4}{42}\right).$$

20. Să se aproximeze prin polinoame soluţia $y = y(t)$, $z = z(t)$ a sistemului

$$\begin{cases} y' + ty + 2z = t \\ z' - y + tz = 0 \end{cases}$$

într-o vecinătate a punctului $t = 0$, $y = 0$, $z = 0$ folosind metoda Runge-Kutta.

R: Scriem sistemul sub forma:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -ty - 2z \\ \frac{dz}{dt} = y - tz. \end{cases}$$

Notăm

$$\varphi(t) = f_1(t,\ y(t),\ z(t)) = t - ty - 2z$$

$$\psi(t) = f_2(t,\ y(t),\ z(t)) = y - tz.$$

Din formula lui Mac-Laurin avem:

$$y(t) = y(0) + \frac{t}{1!}y'(0) + \frac{t^2}{2!}y''(0) + \ldots + \frac{t^n}{n!}y^n(0) + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}y^{(n+1)}(\theta_1),$$

$$\theta_1 \in (0, t)$$

$$z(t) = z(0) + \frac{t}{1!}z'(0) + \frac{t^2}{2!}z''(0) + \ldots + \frac{t^n}{n!}z^{(n)}(0) +$$

$$+ \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}z^{(n+1)}(\theta_2),\ \theta_2 \in (0,\ t).$$

Pentru calculul coeficienților scriem:

$$y(0) = 0;\quad y'(0) = f_1(0,\ 0,\ 0) = 0$$

$$z(0) = 0,\quad z'(0) = f_2\ (0,\ 0,\ 0) = 0$$

$$y''(0) = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial y}y' + \frac{\partial f_1}{\partial z}z' = 1 - y - ty' - 2z'\Big|_{(0,0,0)} = 1$$

$$z''(0) = y' - tz' - z\Big|_{(0,0,0)} = 0.$$

La fel

$$y'''(0) = (y''(t))'_{(0,0,0)} = -2y' - ty'' - 2z''\Big|_{(0,0,0)} = 0$$

$$z'''(0) = (z''(t))'_{(0,0,0)} = y'' - 2z' - tz''\Big|_{(0,0,0)} = 1$$

$$y^{IV}(0) = (y'''(t))'_{(0,0,0} = -3y'' - ty''' - 2z'''\Big|_{(0,0,0)} = -5$$

$$z^{IV}(0) = y''' - 3z'' - tz'''\Big|_{(0,0,0)} = 0.$$

Obținem astfel:

$$y(t) \sim \frac{t^2}{2} - \frac{5t^4}{4!} \text{ și } z(t) \sim \frac{t^3}{6}$$

soluția aproximată prin polinoame de grad patru care trece prin punctul (0,0,0).

1. Să se determine soluţia particulară a sistemului

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + xz = 0 \\ \dfrac{dz}{dx} + xy = 0 \end{cases}$$

care verifică condiţiile iniţiale $y(0) = \frac{1}{2}$, $z(0) = 0$ prin metoda aproximaţiilor succesive în

$$[-1,1]\times\left[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]\times[-1,1].$$

R: Notăm $f_1(x, y, z) = -xz$, $f_2(x, y, z) = -xy$

Avem

$$|f_1(x, y, z)| < 1, \quad |f_2(x, y, z)| < \frac{3}{2}$$

şi deci

$$h = \frac{2}{3}.$$

Funcţiile $f_1(x, y, z)$ şi $f_2(x, y, z)$ sînt lipschitziene deoarece au derivatele parţiale în raport cu y şi z mărginite în

$$[-1, 1]\times\left[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]\times[-1, 1].$$

Construim şirul de aproximaţii succesive

$$y_1(x) = \frac{1}{2} + \int_0^x f_1(x,\ y(0),\ z(0))\,dx = \frac{1}{2}$$

$$z_1(x) = 0 + \int_0^x f_2(x,\ y(0),\ z(0))\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^x x\,dx = -\frac{x^2}{4}$$

$$y_2(x) = \frac{1}{2} + \int_0^x f_1(x,\ y_1(x)\ z_1(x))\,dx = \frac{1}{2} + \int_0^x \frac{x^3}{4}\,dx = \frac{1}{2} + \frac{x^4}{4^2}$$

$$z_2(x) = 0 + \int_0^x f_2(x,\ y_1(x),\ z_1(x))\,dx = -\int_0^x \frac{x}{2}\,dx = -\frac{x^2}{2^2}$$

$$y_3(x) = \frac{1}{2} + \int_0^x f_1(x,\ y_2(x),\ z_2(x))\,dx = \frac{1}{2} + \int_0^x \frac{x^3}{2^2}\,dx = \frac{1}{2} + \frac{x^4}{4^2}$$

$$z_3(x) = 0 + \int_0^x f_2(x,\ y_2(x),\ z_2(x))\,dx = -\int_0^x \left(\frac{x}{2} + \frac{x^5}{4^2}\right)dx = -\frac{x^2}{2^2} - \frac{x^6}{4^2\cdot 6}$$

$$y_4(x) = \frac{1}{2} + \int_0^x f_1(x,\ y_3(x),\ z_3(x))\,dx = \frac{1}{2} + \int_0^x \left(\frac{x^3}{2^2} + \frac{x^7}{4^2\cdot 6}\right)dx = \frac{1}{2} + \frac{x^4}{4^2} + \frac{x}{4^2\cdot 6\cdot 8}$$

$$z_4(x) = 0 + \int_0^x f_2(x,\ y_3(x),\ z_3(x))\,dx = 0 - \int_0^x \left(\frac{x}{2} + \frac{x^5}{4^2}\right)dx = -\frac{x^2}{2^2} - \frac{x^6}{4^2\cdot 6}$$

și dacă ne oprim la aproximația de ordinul patru

$$y_4(x) = \frac{1}{2} + \frac{x^4}{4}\left(\frac{1}{4} + \frac{x^4}{4 \cdot 6 \cdot 8}\right)$$

$$z_4(x) = -\frac{x^2}{4}\left(1 + \frac{x^4}{46}\right).$$

22. Folosind metoda aproximațiilor succesive să se determine soluția sistemului

$$\frac{dy_1}{dt} = ty_2, \frac{dy_2}{dt} = -ty_3, ..., \frac{dy_{n-1}}{dt} = (-1)^n ty_n, \frac{dy_n}{dt} = (-1)^{n+1} ty_1,$$

definit în $[-1, 1]\times A$ cu $A = [-1, 1]^n$, care satisface condițiile inițiale

$$y_1(0) = 1, \qquad y_2(0) = 1, ..., y_n(0) = 1.$$

R: $|ty_2| \leqslant 1$, $|ty_3| \leqslant 1, ..., |ty_n| \leqslant 1$, rezultă $M = 1$,

deci aproximațiile ce urmează sînt definite pentru $t \in [-1, 1]$. Luăm pentru aproximanta de ordinul zero funcția $Y_0 \subset R^n$ de componente $y_{10} = 1$, $y_{20} = 1, ..., y_{n0} = 1$. În continuare avem pe $Y_1 = [y_{11}, y_{21}, ..., y_{n1}]$ dat de

$$y_{11} = 1 + \int_0^t t\,dt = 1 + \frac{t^2}{2},$$

$$y_{21} = 1 - \int_0^t t\,dt = 1 - \frac{t^2}{2},$$

. . . . . .

$$y_{n-1,1} = 1 + (-1)^n \int_0^t t\,dt = 1 + (-1)^n \frac{t^2}{2},$$

$$y_{n,1} = 1 + (-1)^{n+1} \int_0^t t\,dt = 1 + (-1)^{n+1} \frac{t^2}{2}.$$

$Y_2 = (y_{12}, y_{22}, ..., y_{n2})$ este dat de

$$y_{12} = 1 + \int_0^t t\left(1 - \frac{t^2}{2}\right)dt = 1 + \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{2 \cdot 4},$$

$$y_{22} = 1 - \int_0^t \left(1 + \frac{t^2}{2}\right)dt = 1 - \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{2 \cdot 4},$$

. . . . . .

$$y_{n-1,2} = 1 + (-1)^n \int_0^t t\left[1 + (-1)^{n+1} \frac{t^2}{2}\right]dt = 1 + (-1)^n \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{2 \cdot 4},$$

$$y_{n,2} = 1 + (-1)^{n+1} \int_0^t t\left[1 + \frac{t^2}{2}\right]dt = 1 + (-1)^{n+1} \frac{t^2}{2} + (-1)^{n+1} \frac{t^4}{2 \cdot 4}.$$

$Y_3 = (y_{13}, y_{23}, \ldots, y_{n3})$ rezultă din

$$y_{13} = 1 + \int_0^t t\left(1 - \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{2\cdot 4}\right)dt = 1 + \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{2\cdot 4} - \frac{t^6}{2\cdot 4\cdot 6},$$

$$y_{23} = 1 - \int_0^t t\left(1 + \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{2\cdot 4}\right)dt = 1 - \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{2\cdot 4} + \frac{t^6}{2\cdot 4\cdot 6},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_{n-1,3} = 1 + (-1)^n \int_0^t t\left[1 + (-1)^{n+1}\frac{t^2}{2} + (-1)^{n+1}\frac{t^4}{2\cdot 4}\right]dt =$$

$$= 1 + (-1)^n \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{2\cdot 4} - \frac{t^6}{2\cdot 4\cdot 6},$$

$$y_{n,3} = 1 + (-1)^{n+1}\int_0^t t\left[1 + \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{2\cdot 4}\right]dt =$$

$$= 1 + (-1)^{n+1}\left[\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{2\cdot 4} - \frac{t^6}{2\cdot 4\cdot 6}\right]; \text{ ş.a.m.d.}$$

Pentru $n = 2m$ avem iteratele de ordinul

$$2p + 1, \ (y_{1,2p+1}, y_{2,2p+1}, \cdots y_{2m,2p+1})$$

date de

$$y_{2s+1,2p+1} = \sum_{k=1}^{p+1}(-1)^{k+1}\left[\frac{t^{4k-4}}{2\cdot 4\ldots(4k-4)} + \frac{t^{4k-2}}{2\cdot 4\ldots(4k-2)}\right],$$

$$y_{2s,2p+1} = \sum_{k=1}^{p+1}(-1)^{k+1}\left[\frac{t^{4k-4}}{2\cdot 4\ldots(4k-4)} - \frac{t^{4k-2}}{2\cdot 4\ldots(4k-2)}\right],$$

iar iteratele de ordinul $2p$ anume $(y_{1,2p}, y_{2,2p} \ldots, y_{2m,2p})$ sînt date de

$$y_{2s+1,2p} = \sum_{k=1}^{p}(-1)^{k+1}\left[\frac{t^{4k-4}}{2\cdot 4\ldots(4k-4)} + \frac{t^{4k-2}}{2\cdot 4\ldots(4k-2)}\right] + (-1)^p \frac{t^{4p}}{2\cdot 4\ldots(4p)},$$

$$y_{2s,2p} = \sum_{k=1}^{p}(-1)^{k+1}\left[\frac{t^{4k-4}}{2\cdot 4\ldots(4k-4)} - \frac{t^{4k-2}}{2\cdot 4\ldots(4k-2)}\right] + (-1)^p \frac{t^{4p}}{2\cdot 4\ldots(4p)}$$

ce se obţin prin recurenţa. Dacă trecem la limită rezultă că soluţia sistemului cu $n = 2m$ este dată de seriile

$$y_{2s}(t) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\left[\frac{t^{4k-4}}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(4k-4)} - \frac{t^{4k-2}}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(4k-2)}\right],$$

pentru $s = 1, 2, \ldots, m$, şi

$$y_{2s+1}(t) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\left[\frac{t^{4k-4}}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(4k-4)} + \frac{t^{4k-2}}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(4k-2)}\right]$$

pentru $s = 1, 2, \ldots, m-1$, serii care au rază de convergenţă infinită, deci reprezintă soluţia sistemului pentru $t \in R$.

23. Să se determine integrala generală pentru ecuația:

$$(x_1 - x_2)\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial x_3}(x_1 - x_2 + 1)(x_3 - x_4) + \frac{\partial u}{\partial x_4}(x_3 - x_4) = 0.\right.$$

R: Sistemul caracteristic asociat ecuației este:

$$\frac{dx_1}{x_1 - x_2} = \frac{dx_2}{x_1 - x_2} = \frac{dx_3}{(x_3 - x_4)(x_1 - x_2 + 1)} = \frac{dx_4}{x_3 - x_4}$$

din primele două rapoarte rezultă: $dx_1 = dx_2$ care are integrala primă $x_1 - x_2 = C_1$; din combinația integrabilă

$$\frac{dx_3 - dx_4}{(x_3 - x_4)(x_1 - x_2)} = \frac{dx_2}{x_1 - x_2}$$

rezultă integrala primă

$$e^{-x_2}(x_3 - x_4) = C_2.$$

O combinație integrabilă independentă de celelalte două este:

$$\frac{x_4 d(x_1 - x_2 + 1) + (x_1 - x_2 + 1)\, dx_4}{(x_3 - x_4)(x_1 - x_2 + 1)} = \frac{dx_3}{(x_3 - x_4)(x_1 - x_2 + 1)}$$

care conduce la integrala primă:

$$-x_3 + x_4(x_1 - x_2 + 1) = C_3.$$

Soluția generală a ecuației date este așadar

$$u = \Phi(x_1 - x_2,\ (x_3 - x_4)e^{-x_2},\ x_4(x_1 - x_2 + 1) - x_3),$$

unde Φ este o funcție diferențiabilă.

24. Să se determine soluția particulară a ecuației

$$(y - z)\frac{\partial z}{\partial x} - (y - 1)\frac{\partial z}{\partial y} = z - 1,$$

care trece prin curba

$$x = 1,\ z = y^2.$$

R: Este o ecuație cu derivate parțiale cvasiliniară.
Sistemul caracteristic asociat ecuației este

$$\frac{dx}{y - z} = \frac{dy}{1 - y} = \frac{dz}{z - 1},$$

care admite combinațiile integrabile:

a)
$$\frac{dy}{1 - y} = \frac{dz}{z - 1},$$

$$\ln|y - 1| + \ln|z - 1| = C_1^*,$$

sau

$$(y-1)(z-1)=C_1,$$

b)
$$\frac{dx}{y-z}=\frac{dy+dz}{z-y}$$

sau

$$dx+dy+dz=0,$$

deci

$$x+y+z=C_2.$$

Soluția generală a ecuației date este

$$\Phi(x+y+z,\ (y-1)\ (z-1))=0$$

cu Φ diferențiabilă. Pentru a determina soluția particulară cerută din enunț, trebuie să eliminăm pe x, y, z din sistemul

$$x+y+z=C_1,\quad x=1,\quad (y-1)(z-1)=C_2,\quad z=y^2;$$

obținem

$$1+y+y^2=C_1,\quad (y-1)(y^2-1)=C_2;$$

din a doua ecuație rezultă

$$y^3-y^2-y+1=C_2,$$

sau

$$y^3=C_1+C_2-2,\quad y=\sqrt[3]{C_1+C_2-2},$$

prin urmare relația dintre C_1, C_2 este:

$$1+\sqrt[3]{C_1+C_2-2}+\sqrt[3]{(C_1+C_2-2)^2}=C_1.$$

Soluția particulară cerută este deci

$$\sqrt[3]{x+yz-1}+\sqrt[3]{(x+yz-1)^2}=x+y+z-1.$$

25. Să se integreze ecuația cu derivate parțiale

$$\frac{x}{yz}\frac{\partial z}{\partial x}+z\frac{\partial z}{\partial y}=y,$$

apoi să se determine suprafața integrală care trece prin dreapta $x=y=2z$.

R: Sistemul caracteristic atașat ecuației este

$$\frac{yz\,dx}{x}=\frac{dy}{z}=\frac{dz}{y},$$

care admite combinaţia integrabilă

$$\frac{dy}{z} = \frac{dz}{y}$$

sau

$$y\,dy - z\,dz = 0,$$

cu integrala primă

(1) $$y^2 - z^2 = C_1.$$

Din

$$\frac{yz\,dx}{x} = \frac{dy}{z}$$

sau

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{yz^2},$$

în care ţinem seama de (1)

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y(y^2 - C_1)},$$

avem pentru $C_1 > 0$,

$$\ln|x| = -\frac{1}{C_1}\ln|y| + \frac{1}{2C_1}\ln|y - \sqrt{C_1}| + \frac{1}{2C_1}\ln|y + \sqrt{C_1}| + \frac{1}{C_1}\ln C_2$$

sau

$$xy = C_2\sqrt{y^2 - C_1},$$

sau

$$xy = zC_2.$$

Pentru $C_1 < 0$, obţinem

$$\ln|x| = -\frac{1}{C_1}\ln|y| + \frac{1}{2C_1}\ln(y^2 - C_1) + \frac{1}{C_1}\ln C_2,$$

adică acelaşi rezultat. Soluţia generală a ecuaţiei din enunţ este dată de

$$\Phi\left(y^2 - z^2, \frac{xy}{z}\right) = 0$$

care se mai poate scrie şi

$$z = xy\,\Psi(y^2 - z^2).$$

Soluţia particulară căutată (soluţia problemei lui Cauchy) se obţine eliminînd pe x, y, z din sistemul

$$y^2 - z^2 = C_1, \quad xy = z\,C_2,$$

și

$$x = y = 2z,$$

care dau

$$3C_2^2 = 16\,C_1,$$

în care înlocuim apoi pe C_1 și C_2 cu expresiile lor deci

$$3\left(\frac{xy}{z}\right)^2 = 16\,(y^2 - z^2),$$

sau

$$3x^2y^2 = 16\,z^2(y^2 - z^2),$$

care este soluția cerută.

26. Să se determine soluția generală a ecuației cu derivate parțiale

$$(y^2 + z^2 - x^2)\frac{\partial z}{\partial x} - 2xy\frac{\partial z}{\partial y} = -2xz.$$

Să se determine suprafața ce conține curba Γ: $x = 1,\ y^2 + z^2 = 2$.

R: Sistemul caracteristic asociat ecuației este:

$$\frac{\mathrm{d}x}{y^2 + z^2 - x^2} = \frac{\mathrm{d}y}{-2xy} = \frac{\mathrm{d}z}{-2xz},$$

care are integralele prime date de

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}z}{z}$$

și

$$\frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z}{-(x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{\mathrm{d}z}{-2z}.$$

Avem:

$$y = C_1 z,\ x^2 + y^2 + z^2 = C_2 z,$$

deci soluția generală este:

$$\Phi\left(\frac{y}{z},\ \frac{x^2 + y^2 + z^2}{z}\right) = 0.$$

Pentru a determina suprafața ce conține curba Γ punem condiția ca sistemu

$$\begin{cases} x = 1, & y = C_1 z, \\ y^2 + z^2 = 2, & x^2 + y^2 + z^2 = C_2 z, \end{cases}$$

să fie compatibil în x, y, z.

Obținem prin eliminări condiția:

$$9C_1^2 + 9 = C_2^2,$$

care conduce la suprafețe

$$9(y^2 + z^2) = 2(x^2 + y^2 + z^2)^2.$$

27. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$(x_2 + x_3 + \ldots + x_n + z)\frac{\partial z}{\partial x_1} + (x_1 + x_3 + \ldots + x_n + z)\frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots$$

$$\ldots + (x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + z)\frac{\partial z}{\partial x_n} = x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

R: Sistemul asociat ecuaţiei este

$$\frac{dx_1}{x_2 + x_3 + \ldots + x_n + z} = \frac{dx_2}{x_1 + x_3 + \ldots + x_n + z} = \ldots = \frac{dx_n}{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + z} =$$

$$= \frac{dz}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}.$$

Avem combinaţiile integrabile

$$\frac{dz - dx_1}{z - x_1} = \frac{dx_2 - dx_1}{x_2 - x_1},$$

$$\frac{dz - dx_2}{z - x_2} = \frac{dx_2 - dx_1}{x_2 - x_1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dz - dx_n}{z - x_n} = \frac{dx_2 - dx_1}{x_2 - x_1};$$

care conduc la integralele prime:

$$z - x_1 = C_1(x_2 - x_1),$$

$$z - x_2 = C_2(x_2 - x_1),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$z - x_n = C_n(x_2 - x_1);$$

soluţia generală este dată de

$$\Phi\left(\frac{z - x_1}{x_2 - x_1}, \frac{z - x_2}{x_2 - x_1}, \ldots, \frac{z - x_n}{x_2 - x_1}\right) = 0$$

cu Φ, arbitrară, derivabilă.

BIBLIOGRAFIE

1) Aramă, L., Morozan, T. *„Culegere de probleme de calcul diferențial și integral"* vol. I Ed. Tehnică 1964.
2) Berman G.N., *„Sbornik zadaci po cursu matematicescovo analiza"* Москва 1964.
3) Bas, I. *„Exercices de Mathematiques"* Paris Mason 1965.
4) Doneddu, A. *„Cours de mathématiques Supérieurs" T I, II.* Dunod. Paris. 1966.
5) Calvo, A., Calvo, B. *„Exercices d'Analyse"* Paris. Livrairie Armand Calin 1971.
6) Chilov, G. *„Analyse mathématique"* vol. I Editions Mir — Moscou 1973.
7) Costinescu, O., Amihăiesei, C. Bîrsan. *„Topologie generală"* — probleme — Ed. did. și ped. 1974.
8) Craiu, M., Roșculeț, M.N. *„Ecuații diferențiale aplicative"* Ed. did. și ped. 1971.
9) Dieudonné, J. *„Osnovi soviemenovo analiza"* Editura Mir Moscova 1964.
10) Demidovici, P. B. *„Culegere de probleme și exerciții de analiză matematică"* Buc. Ed. t. 1956.
11) Donciu, N. și Flondor, D. *„Culegere de probleme de algebră și analiză matematică"* vol. I, vol. II, Buc. Ed. did. 1964.
12) Fihtengolț, G.M. *„Curs diferențialnovo i integralnovo iseislenia"* Москва 1963.
13) Găină, S., Cimpu, E., Bucur, Gh. *„Culegere de probleme de calcul diferențial și integral"* vol. II, III Ed. tehnică 1966.
14) Ghünter, N. M. și Guzmin, R. O. *„Culegere de probleme de matematici superioare"* Buc. Ed. tehnică 1953.
15) Ghermănescu, M. *„Culegere de probleme de ecuații diferențiale"* Ed. did. 1963.
16) Hewitt, E. și Stromberg, K. *„Real and abstract analysis Springer"* Verlag 1965.
17) Kamke, E. *„Spravocinik po obicrovenim diferențialnim uravnemiam"* Mockва 1971.
18) Lefort, G. *„Algèbre et analyse"*. Exercices. Illustration du Cours de Mathématiques générales. Ed. 2-a Paris. Dunod. 1964.
19) Marinescu, Gh. *„Teoria ecuațiilor diferențiale și integrale"* Buc. Ed. did. și ped. 1963.
20) Nicolescu, M., Dinculeanu, N., Marcus, S. *„Manual de analiză matematică"* vol. I, vol. II. Ed. did. 1962.
20)[1] Nicolescu, Miron. *„Analiză matematică"* vol I, II, III. Ed. tehnică 1957.
21) Natanson, I. *„Teoria funcțiilor de variabilă reală"* 1957. Ed. tehnică.
22) Ostrowski, A. *„Vorlesungen über differential und integral rechnung"*. Verlag Birkhause 1954, 1972.
23) Polya, G., Szegö, G. *„Problems and theorems in analysis"* vol. I. Springer Verlag.
24) Quinet, J. *„Cours élémentaire de math. supérieures"* Paris Dunod 1964.
25) Rivaud, J. *Exercices d'analyse à l'usage des candidats aux grands écoles"* Paris 1965.
26) Roșculeț, M. M. *„Curs de analiză matematică"* Ed. didactică și ped. 19.
27) Roșculeț, M. N., ș.a. *„Culegere de probleme de analiză matematică"* Ed. did. și ped. 1968.
28) Rogai, E. *„Exerciții și probleme de ecuații diferențiale și integrale"* Ed. tehnică 1965.
29) Rudin, Y. *„Osnovi matematicescovo analiza"* Москва 1966.
30) Sireţchi, Gh. *„Exerciții rezolvate de analiză matematică"* litografiat Univ. București.
31) Spivak, M. *„Matematiceskni analiz na umogoobrazviah"* Москва 1968.
32) Smirnov, V. *„Cours de mathématiques supérieures"* vol. II. Moscou 1970.
33) Teodorescu, N. *„Curs de ecuații diferențiale și cu derivate parțiale cu aplicații fizice și geometrice"* Ed. Fac. Științe 1949—1950.
34) *„The american mathematical monthly"* 1968—1974.

CUPRINS

Cap. I. *Mulțimi. Numere. Structuri* 5
Cap. II. *Șiruri și serii numerice* 41
Cap. III. *Funcții. Limite. Continuitate* 75
Cap. IV. *Derivate. Diferențiale. Funcții diferențiale* 114
Cap. V. *Șiruri și serii de funcții* 158
Cap. VI. *Funcții definite implicit. Extreme cu legături. Dependențe funcționale* 191
Cap. VII. *Transformări punctuale. Schimbări de variabile* 216
Cap. VIII. *Integrala Riemann, Stieltjes, Lebesgue* 232
Cap. IX. *Integrale curbilinii. Aplicații* 278
Cap. X. *Integrale duble, de suprafață. Aplicații.* 298
Cap. XI. *Integrale triple. Aplicații.* 321
Cap. XII. *Formule integrale* 343
Cap. XIII. *Integrale multiple* 351
Cap. XIV. *Ecuații diferențiale* 362
Cap. XV. *Sisteme de ecuații diferențiale* 401
Bibliografie 437